

VYSOKOŠKOLSKÉ SKRIPTÁ

Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského

Peter Kohaut, Pavel Šúra

ELEKTRONIKA I

Analýza lineárnych elektrických obvodov

2003

UNIVERZITA KOMENSKÉHO BRATISLAVA

© RNDr. Peter Kohaut, doc. RNDr. Pavel Sůra, CSc. 2003

Recenzenti: doc. Ing. Anton Švec, CSc.,
doc. RNDr. Andrej Jaroševič, CSc.

Za odbornú a jazykovú stránku týchto vysokoškolských skrípt zodpovedajú autori.

ISBN 80-223-0615-0

OBSAH

Úvod	5
1. ZÁKLADNÉ POJMY	7
1.1 Ideálne prvky	8
1.2 Schematické značky	9
1.3 Elektrický signál.....	12
2. ZÁKLADY TEÓRIE OBVODOV	14
2.1 Vlastnosti matematického modelu	14
2.2 Operátorový počet	15
2.2.1 Symbolicko-komplexné zobrazenie	17
2.2.2 Fourierova transformácia	20
2.2.3 Laplaceova transformácia	21
2.2.4 Spätná Laplaceova transformácia	29
2.3 Kirchhoffove zákony a Ohmov zákon	36
2.3.1 Základné topologické pojmy	36
2.3.2 Kirchhoffov zákon pre prúdy (1. Kirchhoffov zákon)	37
2.3.3 Kirchhoffov zákon pre napätia (2. Kirchhoffov zákon).....	37
2.3.4 Zovšeobecnený Ohmov zákon	38
3. VŠEOBECNÉ METÓDY ANALÝZY OBVODOV V USTÁLENOM HARMONICKOM STAVE	42
3.1 Metóda slučkových prúdov	43
3.2 Metóda uzlových napätí	44
3.3 Metódy na čiastočné riešenie obvodov	45
3.4 Neautonómne mnohobody	49
4. MATICOVÉ METÓDY ANALÝZY ELEKTRICKÝCH OBVODOV	54
4.1 Metóda slučkových prúdov v maticovom zápise	54
4.2 Metóda uzlových napätí v maticovom zápise	55
4.3 Zovšeobecnená metóda uzlových napätí	56
4.3.1 Úprava zapojenia na dvojbránu	57
4.3.2 Obvody s operačnými zosilňovačmi	62
4.3.3 Obvody s dvoma vstupmi	65
4.3.4 Obvody s indukčnými väzbami	69
5. RIEŠENIE ELEKTRICKÝCH OBVODOV METÓDOU ORIENTOVANÝCH GRAFOV	73
5.1 Základné pojmy	73
5.2 Orientované grafy elektrických obvodov	75
5.3 Masonovo pravidlo	77
5.4 Orientované grafy a metóda uzlových potenciálov	79
5.4.1 Obvody s aktívnymi prvkami	85
5.4.2 Obvody so zosilňovačom	85
5.4.3 Ideálny zosilňovač	87
5.4.4 Ideálny operačný zosilňovač	87
5.4.5 Obvody s tranzistormi	90
5.5 Spôsob vyhľadávania prenosových ciest a slučiek orientovaného grafu.....	98
6. STABILITA ELEKTRONICKÝCH SÚSTAV	104
6.1 Hurwitzovo-Routhovo kritérium stability	105
6.1.1 Schurov algoritmus	106
6.2 Michajlovovo-Leonhardovo kritérium stability	107
6.3 Nyquistovo kritérium stability	109

6.4 Bodeho logaritmicko-kmitočtové kritérium stability	111
6.4.1 Logaritmicko-kmitočtové charakteristiky	111
6.4.2 Bodeho kritérium stability	113
6.5 Poznámka k vyšetreniu stability obvodov	114
Literatúra	116

ÚVOD

Tieto skriptá vznikli ako pomocný text k prednáškam z elektroniky, konaným na Matematicko-fyzikálnej fakulte UK pre odborné a učiteľské štúdium fyziky. Svojou povahou je elektronika síce technická disciplína, ale vychádza z fyzikálnych základov, bez matematiky sa nezaobíde a experimentálny fyzik bez elektroniky tiež nie. Štúdium elektroniky je podmienené znalosťou analýzy elektrických obvodov, čo je náplňou predloženej učebnice.

Neprichádzame s ničím novým. Na danú tému jestvuje veľké množstvo dobrej literatúry. Problém je vo výbere metód vhodných pre neprofesionála elektronika, ktoré majú byť rýchle, spoľahlivé, čo do princípu jednoduché ale presné, nenáročné na pamäť, aby si ich absolvent aj po dlhšej prestávke rýchlo vybavil a osvojil. Dúfame, že pre študenta, ktorý absolvoval základný kurz matematiky a fyziky na MFF UK, budú metódy, ktoré predkladáme, vyhovujúce.

Predpokladáme, že čitateľ sa ľahko rozpamätá na základné poznatky z algebry, ktoré sa týkajú riešenia sústav lineárnych rovníc a z matematickej analýzy na základné vlastnosti funkcie komplexnej premennej. Na oživenie pamäti poslúži výborne kniha Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry, ktorú napísal A. Angot, matematik s dobrými znalosťami problémov fyziky a techniky. Z ďalších prameňov sú uvedené v zozname odporúčanej literatúry len tie, ktoré sa najviac blížia tematickému zameraniu nášho textu.

Rozsah skrípt nám nedovoľuje zaoberať sa podrobne jednotlivými témami, ani exaktnými matematickými dôkazmi, pretože každá z kapitol môže byť námetom pre monografiu. Boli sme vedení snahou poskytnúť čitateľovi dobrý prehľad takých metód analýzy elektrických obvodov, ktoré relatívne rýchlo a bezpečne vedú k cieľu – určeniu vlastností elektrických zapojení. Že sú uvedené metódy vhodné na numerické spracovanie počítačom, sa v dnešnej dobe považuje za samozrejmosť.

Autori ďakujú svojim kolegom z Katedry rádiofyziky, doc. RNDr. Andrejovi Jaroševičovi CSc. a RNDr. Františkovi Kundracikovi, PhD. za pripomienky, podnety a námety, ktorými nám veľmi pomohli, a za upozornenia na viaceré chyby a nepresnosti v rukopise.

1 ZÁKLADNÉ POJMY

Elektromagnetické deje, ktoré prebiehajú v nejakej fyzikálnej sústave, môžeme opísať Maxwellovými rovnicami. Ich riešenie pre daný prípad však nemusí byť jednoduché, a to ani pre nekomplikované technické úlohy. Často treba siahnúť po istých zjednodušeníach, aby obťažnosť a časová náročnosť matematického riešenia bola primeraná dosiahnutému výsledku. V mnohých prípadoch sa k riešeniu dopracujeme podstatne ľahšie využitím metód *teórie elektrických obvodov*.

Použijeme postup vo fyzike veľmi častý. Reálnu fyzikálnu sústavu nahradíme sústavou *jednoduchšou*, v ktorej sa obmedzíme len na tie podstatné vlastnosti, ktoré sú rozhodujúce pre skúmaný jav. Hovoríme, že reálnu sústavu nahradíme **fyzikálnym modelom**. Jednotlivé časti tohto modelu je možné fyzikálne pomerne jednoducho reprezentovať a opísať ich správanie sa matematicky, napríklad sústavou rovníc. Tento abstraktný opis je vlastne modelom reálnej fyzikálnej sústavy a nazýva sa **matematický model**.

Prechod od reálnej fyzikálnej sústavy k matematickému modelu predstavuje v praxi často jediný spôsob teoretického riešenia skúmaného problému. Navyše umožňuje nahrádzať reálnu sústavu rôznymi modelmi a tie skúmať v laboratórnych podmienkach. Matematické modely možno skúmať buď analyticky, alebo numericky pomocou počítačov.

Elektrické zariadenie je sústava medzi sebou *rozmanite a účelne* pospájaných jednoduchých častí tak, že nimi môžu tiecť elektrické prúdy. V praxi nám zvyčajne postačuje, ak vieme v skúmanej sústave určiť okamžité alebo ustálené rozdelenie prúdov a napätí, ktoré sa ľahko merajú, na rozdiel od veličín opisujúcich elektrické a magnetické polia. Dostávame sa tak k pojmu **elektrický obvod**, ktorým budeme označovať takú sústavu, v ktorej sa elektromagnetické javy dajú dostatočne presne vyjadriť pomocou elektrických prúdov a napätí. V ďalšom budeme používať skrátený názov obvod.

Pri štúdiu reálneho elektrického obvodu sa môžeme obmedziť iba na niektoré jeho vlastnosti. Dostávame sa k jednoduchšiemu systému – modelu, ktorým je zase elektrický obvod. Tento model budeme podľa stupňa abstrakcie nazývať *idealizovaný* alebo *ideálny* elektrický obvod. Teória obvodov vychádza z týchto modelov a skúma ich vlastnosti a metódy riešenia.

Fyzikálne modely elektrických sústav sa skladajú z viacerých obvodových členov rôzneho charakteru. Najzákladnejšími časťami týchto modelov sú **obvodové prvky**, ktorých vlastnosti možno charakterizovať *jednou veličinou* – parametrom. Nazveme ich ideálnymi prvkami. Reálny prvok obvodu vo všeobecnosti možno nahradiť spojením viacerých ideálnych prvkov.

Prvok, ktorého parameter nezávisí od veľkosti prúdu, ktorý ním preteká, ani od napätia na ňom, sa nazýva **lineárny prvok**. Ak je parameter prvku funkciou napätia na ňom alebo prúdu tečúceho prvkom, ide o nelineárny prvok. Parametre prvku však môžu závisieť od iného parametra (času, teploty, tlaku a podobne), v takom prípade budeme hovoriť o **parametrickom prvku**. I parametrický prvok môže byť lineárny alebo nelineárny.

Elektromagnetické deje v obvodoch vyvolávajú elektromagnetické vlnenie, ktoré sa šíri rýchlosťou svetla. Ak sú geometrické rozmery obvodu i jeho častí zanedbateľne malé oproti vlnovej dĺžke elektromagnetických vln, dajú sa vlnové deje v obvode zanedbať. Vtedy je doba, za ktorú sa vlnenie dostane z jedného miesta obvodu do iného, zanedbateľne krátka a parametre prvkov nie sú funkciami geometrických súradníc. V takom prípade hovoríme o **obvode so sústredenými parametrami**. Veličiny charakterizujúce elektromagnetické pole, teda aj napätia a prúdy, sú iba funkciami času a nezávisia od súradníc, takže platia pre ne (všade mimo objem prvkov) vzťahy $\text{div } \mathbf{i}(t) = 0$ a $\text{rot } \mathbf{E}(t) = 0$, kde $\mathbf{i}(t)$ je prúdová hustota, $\mathbf{E}(t)$ intenzita elektrického poľa. Inak povedané: prúdy sú rovnomerne rozdelené cez prierez i dĺžku vodičov a z vonkajších magnetických polí sa do obvodu neindukujú žiadne prúdy. Hovoríme vtedy o *kvázistacionárnych potenciálových poliach*.

1.1 Ideálne prvky

Ideálne prvky sú najjednoduchšie prvky obvodu. Ideálny prvok môžeme definovať ako matematický model fyzikálneho javu, založeného na pohybe nosičov náboja vo vákuu, plyne a v pevných látkach. Niekoľkými ideálnymi prvkami nahradíme reálne prvky a im zodpovedajúce modely tak, aby v rovnakých pracovných podmienkach mali s požadovanou presnosťou (teda približne) rovnaké vlastnosti. Pri takejto idealizácii potom skúmame iba základné závislosti medzi elektrickými a magnetickými veličinami, menovite prúdom, napätím, nábojom a celkovým magnetickým tokom. Tieto závislosti charakterizujú základné vlastnosti prvkov a preto ich nazývame **charakteristiky**.

Pri mnohých aplikáciách budeme musieť brať do úvahy rôzne, často nežiaduce vplyvy elektrických a magnetických polí spätých s daným prvkom. Ako príklad možno uviesť transportné oneskorenie nosičov náboja v prostredí, v ktorom sa tieto pohybujú. Modely, ktoré zahŕňajú v sebe aj takéto závislosti od času, budú samozrejme zložitejšie; tým sa rozšíri aj počet charakteristík. *Statické charakteristiky* opisujú modely pre prúdy a napätia v čase stále, *dynamické charakteristiky* naopak, pre časovo premenné veličiny.

V ďalšom opise prvku budeme predpokladať, že vodiče spájajúce prvky majú nulový odpor a elektrické pole mimo prvku je potenciálové ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$).

Veličiny, s ktorými budeme pracovať, a ktoré môžeme merať, sú: napätie u , prúd i , náboj q a celkový magnetický tok Φ . Náboj a magnetický tok môžeme merať nepriamo integráciou prúdu a napätia podľa času ($q = \int i \cdot dt$, $\Phi = \int u \cdot dt$) a z výsledkov meraní zostavovať vzťahy medzi ľubovoľnou dvojicou veličín. Je ich spolu dvanásť. Štyri vzťahy sme už spomenuli a určujú prevod prúd \Leftrightarrow náboj a celkový magnetický tok \Leftrightarrow napätie. Z ďalších ôsmich má vzťah náboj \Leftrightarrow celkový magnetický tok zatiaľ malý praktický význam. Posledných šesť

$$u(i) \text{ resp. } i(u), \quad u(q) \text{ resp. } q(u), \quad \Phi(i) \text{ resp. } i(\Phi)$$

sú základné charakteristiky opisujúce ideálne prvky.

Vžilo sa delenie prvkov na *aktívne* a *pasívne*. Aktívny prvok je zdrojom energie a jestvuje v dvoch typoch:

Ideálny zdroj napätia udržuje na svojich svorkách elektrické napätie, ktorého veľkosť nezávisí od výkonu odovzdávaného zdrojom do záťaže. Parametrom ideálneho zdroja napätia je napätie zdroja (elektromotorické napätie).

Ideálny zdroj prúdu dodáva prúd, ktorého veľkosť nezávisí od výkonu odovzdávaného do záťaže. Parametrom ideálneho zdroja prúdu je prúd zdroja.

V teórii obvodov sa zdroje ešte delia na *nezávislé* (autonómne) a *riadené* (neautonómne). Parametre riadených zdrojov sú funkciami napätí alebo prúdov v inej časti obvodu (elektricky riadené zdroje) alebo sú funkciami nejakej všeobecnej riadiacej veličiny. *Riadené zdroje sú teda parametrické aktívne prvky*.

Pasívne prvky energiu buď spotrebávajú, alebo ju v sebe hromadia a vydávajú. Sú to tieto tri prvky:

Ideálny odpor (rezistor) spotrebováva elektrickú energiu nenávratnou premenou na tepelnú. Parametrom je elektrický odpor $R = u/i$ alebo vodivosť $G = i/u = 1/R$.

Ideálny kondenzátor (kapacitor) je zásobníkom energie elektrického poľa, ktoré je sústredené v jeho objeme. Túto energiu môže ideálny kondenzátor bez strát prijímať a vydávať. Parametrom je kapacita $C = q/u$. Vzťah medzi prúdom a napätím dostaneme derivovaním $dq/dt = i = d(Cu)/dt$.

Ideálna cievka (induktor) je zásobníkom energie magnetického poľa, ktoré je sústredené v jej objeme. Túto energiu môže ideálna cievka bez strát prijímať a odovzdávať. Parametrom je indukčnosť $L = \Phi/i$. Vzťah medzi prúdom a napätím získame derivovaním $d\Phi/dt = u = d(Li)/dt$.

Parametre ideálnych pasívnych prvkov môžu závisieť od nejakého ďalšieho parametra, najčastejšie od času. V takom prípade hovoríme o riadených ideálnych prvkoch alebo tiež o parametrických prvkoch.

Ideálne prvky sa dajú analyticky ľahko popísať, ak ich parametre nie sú funkciami prúdov a napätí. Pretože charakteristiky takýchto prvkov sú dané lineárnymi funkciami, hovoríme o lineárnych ideálnych prvkoch. Modely takých prvkov a obvodov budú závisieť od rýchlosti zmien prúdov a napätí.

Ideálny nelineárny parametrický prvok je popísaný charakteristikou, ktorej funkčná závislosť je $y = f(x, p)$, kde x a y sú napätia a prúdy, p je riadiaca veličina. Takýto prvok možno opísať viacerými parametrami:

Statický parameter P je pomer závislej a nezávislej veličiny pri konštantnej riadiacej veličine

$$P = y/x = f(x, p)/x ; \quad p = \text{konšt.}$$

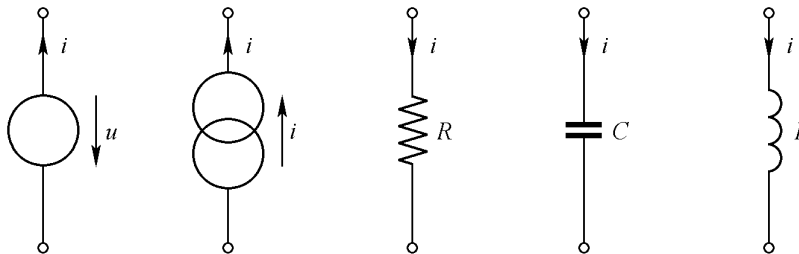
Hodnota statického parametra je premenlivá a závisí od okamžitej hodnoty nezávislej veličiny. Preto sa zavádzajú ešte:

$$\begin{aligned} \text{diferenciálny parameter } P_d &= \partial f(x, p) / \partial x, \\ \text{prenosový diferenciálny parameter } K_d &= \partial f(x, p) / \partial p. \end{aligned}$$

Je zrejmé, že v porovnaní s predchádzajúcim typom bude práca s nelineárnymi prvkami značne náročnejšia.

1.2 Schematické značky

Topologickým obrazom matematického modelu je schéma. Ideálne prvky obvodu v schéme kreslíme dohovorenými schematickými značkami, ktoré udávajú druh prvku a počet svoriek, ktorými sa prvok zapája do obvodu (obr. 1).

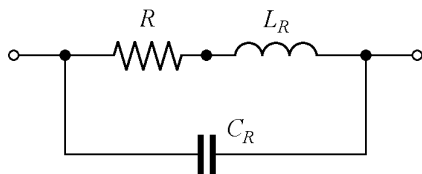


Obr. 1

Svorky zdroja tvoria usporiadanú dvojicu, a teda má zmysel hovoriť o smere. Napätie je rozdiel potenciálov a tiež možno hovoriť o akomsi smere, pretože jeden z potenciálov môže byť vyšší. V schematických značkách sa znázorňuje napätie šípkou smerujúcou od vyššieho potenciálu k nižšiemu. V pasívnych prvkoch tečie prúd od vyššieho potenciálu k nižšiemu, preto sú šípky znázorňujúce napätie a prúd súhlasné. Na aktívnych prvkoch sú orientované proti sebe. Značenie je však vecou dohovoru, a preto sa v literatúre môžeme stretnúť aj s úplne odlišným označením.

Schematické značky ideálnych prvkov z obr. 1 sa bežne používajú aj na označenie reálnych súčiastok. Závisí od stupňa idealizácie, čo ten-ktorý autor rozumie pod danou schematickou značkou.

Napr. reálny rezistor na vyšších kmitočtoch sa dá nahradiť modelom, ktorého schéma je na obr. 2, kde L a C sú vlastná indukčnosť a vlastná kapacita rezistora. Československá norma pripúšťa zobrazovať rezistor podľa obr. 3, čo je schematická značka pre obecnú impedanciu. Jej použitie pre rezistor sa bežne vžílo.

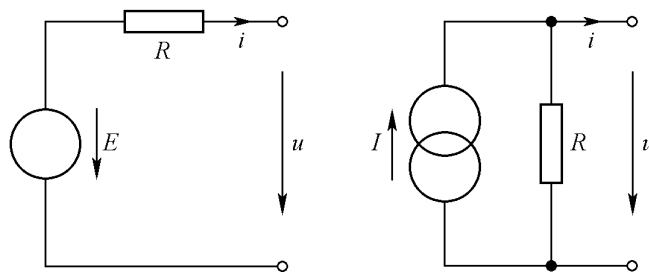


Obr. 2



Obr. 3

Jeden objekt možno znázorniť viacerými modelmi, a preto aj viacerými schémami. Napr. reálny zdroj elektrickej energie sa môže modelovať ideálnym zdrojom napätia alebo ideálnym zdrojom prúdu, obr. 4.

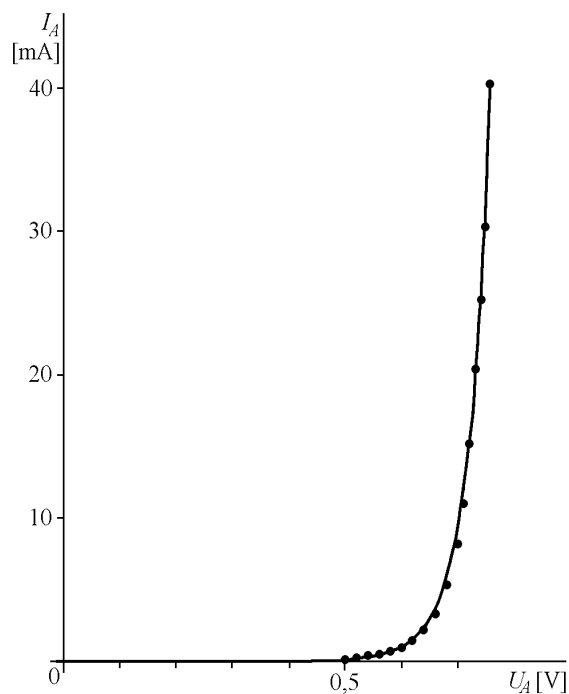


Obr. 4

Obe schémy opisujú ten istý reálny zdroj, preto musia byť rovnocenné vo všetkých pracovných režimoch. Porovnaním matematických modelov dostaneme vzťah

$$E = RI,$$

ktorý umožňuje kedykoľvek v schéme elektrického obvodu nahradiť jeden model zdroja druhým, čo býva pri riešení obvodov veľmi častý prípad.



Obr. 5

Príklad 1. Ukážeme si rôzne modely diódy s použitím jej voltampérovej charakteristiky. Meraním kremíkovej polovodičovej diódy KA 504 sme získali V-A charakteristiku (body na obr. 5).

Schockleyova teória poskytuje pre takúto diódu matematický model

$$I_A = I_s [\exp(U_{AK}/mU_T) - 1],$$

kde I_s je záverný prúd. Bežná hodnota pre kremíkové diódy je $I_s \approx 10$ pA, (konkrétne pre túto diódu to je $3,51 \cdot 10^{-10}$ A), $U_T = kT/q$ sa nazýva **tepelné napätie**. $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konštanta,

$T = 296 \text{ K}$ ($23 \text{ }^\circ\text{C}$) je absolútna teplota PN prechodu v laboratórnych podmienkach, $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ je náboj elektrónu, m je konštanta, ktorá v sebe zahŕňa vplyv technológie výroby, čistotu materiálov, strmosť PN prechodu atď. Jej hodnota je 1 až 2. V praxi možno vo väčšine prípadov brať hodnotu $mU_T = 30 \text{ mV}$; konkrétne pre vyšetrovanú diódu je $m = 1,606$, $mU_T = 41 \text{ mV}$.

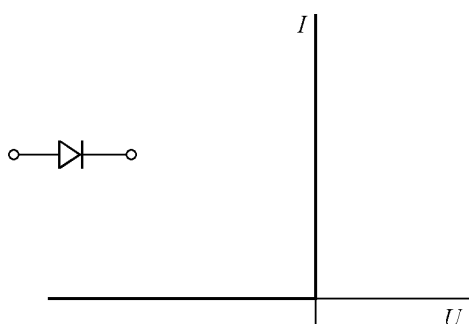
Z grafu vidno, že tento matematický model (na obr. 5 plná čiara) dosť dobre opisuje reálnu diódu.

Pri výbere vhodného modelu môžeme postupovať rôzne:

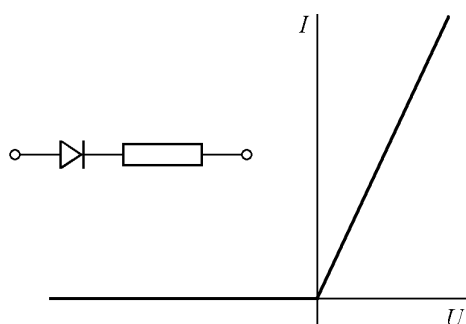
1. Ak nás zaujíma iba vodivý stav diódy, zavedieme **ideálnu diódu**. Jej V-A charakteristika je spolu so schematickou značkou na obr. 6. Pre $U > 0$ ideálna dióda vedie, pre $U < 0$ je uzavretá. Je to dosť hrubé priblíženie, ale na výklad a pochopenie funkcie väčšiny obvodov, ktoré využívajú ventilový účinok diódy, to postačuje.

2. Ak treba počítať s dynamickým odporom diódy, ale pracovné napätia sú $U \gg 0,5 \text{ V}$, možno použiť model z obr. 7 a prvok nazývať **idealizovanou diódou**.

3. Pre väčšinu obvodov vystačíme s „linearizovaným modelom idealizovanej diódy“ na obr. 8. Model dosť dobre zahŕňa vplyv „kolena“ V-A charakteristiky diódy, ale exponenciálny priebeh pre $U > U_p$ je nahradený lineárnym priebehom, čo umožňuje ako-tak kvantitatívne opísať vlastnosti diódy. **Prahové napätie** U_p a dynamický odpor určíme jednotlivo, podľa povahy a určenia obvodu, v ktorom je dióda zapojená.



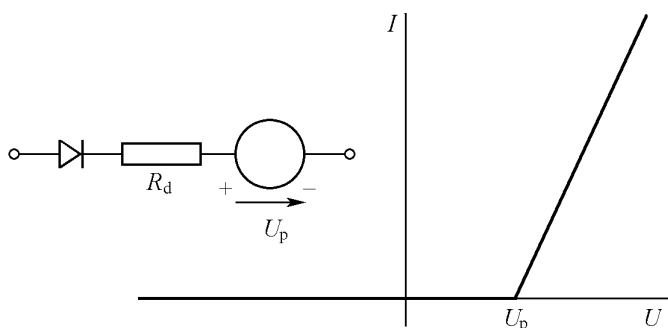
Obr. 6



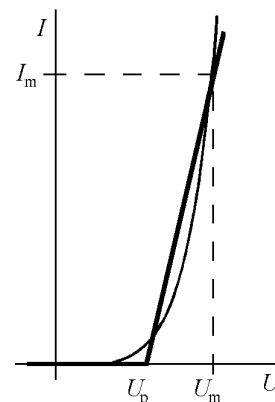
Obr. 7

Pre prípad usmerňovačov malého napätia, kde nemožno U_p zanedbať, môžeme vyjsť z energetickej bilancie. Budeme predpokladať, že výkon rozptýlený na reálnej dióde a na konštantnom dynamickom odpore linearizovanej diódy sú rovnaké (obr. 9). I_m a U_m sú maximálne hodnoty prúdu a napätia, ktoré sa na dióde usmerňovača vyskytnú, takže

$$\int_0^{U_m} I dU = \frac{1}{2}(U_m - U_p)I_m.$$



Obr. 8



Obr. 9

Pretože maximálny prúd cez diódu je $I_m = I_s[\exp(U_m/mU_T) - 1]$ a dynamický odpor diódy je $R_d = (U_m - U_p)/I_m$, môžeme vypočítať výkon rozptýlený na dióde

$$\int_0^{U_m} IdU = \int_0^{U_m} I_s (e^{U/mU_T} - 1) dU = I_s (mU_T e^{U/mU_T} - U) \Big|_0^{U_m}.$$

Po dosadení integračných medzí

$$I_s (mU_T e^{U_m/mU_T} - U_m) - I_s U_m = I_m mU_T - I_s U_m.$$

Výkon rozptýlený na dynamickom odpore modelu diódy je $\frac{1}{2} R_d I_m^2$.

Člen $I_s U_m < 10^{-11} \text{ [A]} \cdot 1 \text{ [V]} = 10^{-11} \text{ W}$ možno zanedbať voči $I_m mU_T \approx 0,05$ až $0,5 \text{ W}$, teda

$$mU_T \approx \frac{1}{2} R_d I_m \text{ a z toho je } R_d \approx 2mU_T/I_m.$$

Prahové napätie podľa obr. 9 je

$$U_p = U_m - I_m R_d \approx U_m - 2mU_T.$$

Po logaritmovaní vzťahu $I_m = I_s[\exp(U_m/mU_T) - 1]$, vyjadrením U_m a dosadením do poslednej rovnice je

$$U_p = mU_T \ln\left(\frac{I_m}{I_s} + 1\right) - 2mU_T \approx mU_T \left(\ln \frac{I_m}{I_s} - 2\right).$$

V argumente funkcie ln sme zanedbali jednotku, pretože $I_m/I_s = 10^{10}$ až 10^{12} .

V prípade konkrétnej diódy KA 504 so zmeranou V-A charakteristikou na obr. 5, ak uvažíme že povolený maximálny prúd je 50 mA, možno určiť z grafu $I_s = 3,51 \cdot 10^{-10} \text{ A}$, $mU_T = 0,041 \text{ V}$, a $R_d = 1,62 \Omega$, $U_p = 0,689 \text{ V}$.

Iné kritérium poskytne iné hodnoty U_p , R_d . Napríklad z dotýčnice v bode I_m , U_m dostaneme hodnoty ($U_m = 0,77 \text{ V}$) $R_d = 1,22 \Omega$ a $U_p = 0,71 \text{ V}$.

V príklade bol naznačený jeden z možných spôsobov linearizácie prvku. Uvedený postup zosilňuje čitateľovu predtuchu, že s riešením nelineárnych obvodov sú spojené rozsiahle problémy a že bude lepšie, kde to len trochu pôjde, držať sa lineárnych modelov.

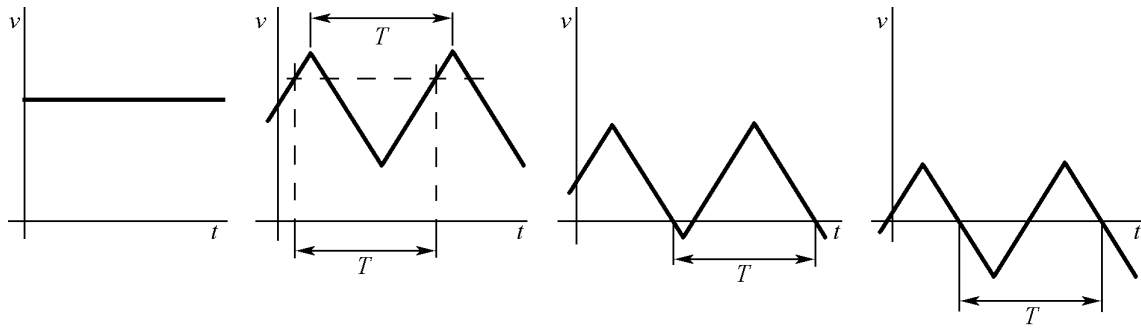
1.3 Elektrický signál

Vyšetrovaním fyzikálnej sústavy sa snažíme získať informácie o jej stave. Veličinu, ktorá obsahuje hľadanú informáciu, nazveme signál. Signál môžeme reprezentovať fyzikálne (tlak, teplota, rýchlosť, zrýchlenie, elektrické napätie, magnetický tok a pod.) a matematicky opísať rovnicou, resp. sústavou rovníc. Pomocou vhodných prevodníkov sa dá ľubovoľný signál premeniť na elektrickú veličinu – elektrický signál. Teóriou prevodu, prenosu a uschovania informácie zakódovanej vo forme elektromagnetických veličín sa zaoberá viacero vedných odborov. Jednou z hlavných úloh elektrických obvodov je spracovanie a prenos elektrických signálov v tvare elektrických napätí a prúdov.

Všeobecne sú prúdy a napätia funkciami času. V ustálenom režime sú to periodické funkcie, pre ktoré platí vzťah

$$u(t + T) = u(t),$$

kde u je elektrická veličina, t čas a T perióda.



Obr. 10

Špeciálnym prípadom periodickej veličiny je jednosmerná veličina (obr. 10a), ktorá s časom svoju hodnotu nemení ($T \rightarrow \infty$). V čase premennú veličinu, ktorá nemení svoju polaritu, nazývame pulzujúcou (obr. 10b). Periodická veličina (obr. 10c), ktorá počas periódy mení svoju polaritu sa nazýva kmitavá. Špeciálnym prípadom kmitavej veličiny je striedavá veličina (obr. 10d) ktorej stredná hodnota za celistvý počet periód je nulová.

Z kmitavých veličín majú v teórii obvodov výnimočné postavenie striedavé veličiny opísané harmonickými funkciami času

$$u(t) = V \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{alebo} \quad u(t) = W \cos(\omega t + \varphi) .$$

Napätia a prúdy s harmonickým priebehom sa pomerne ľahko generujú, matematické operácie s harmonickými funkciami sú jednoduché a ľubovoľnú periodickú funkciu možno vyjadriť súčtom harmonických funkcií (pozri Fourierove rady).

2 ZÁKLADY TEÓRIE OBVODOV

Úlohou teórie obvodov je:

1. **Analýza** – zo známej fyzikálnej a topologickej štruktúry obvodu sa v ňom určujú napätia a prúdy, t. j. zisťuje sa stav obvodu. Zo známych napätí a prúdov sa dajú určiť vzájomné vzťahy niektorých vybraných dvojíc veličín. Tieto vzťahy spravidla postačujú na stanovenie obvodových funkcií, ktoré v praxi dostatočne opisujú stav obvodu. Najčastejšie to sú:

Prenosová funkcia, ktorá udáva súvis medzi odozvou obvodu – výstupným signálom a na obvod pôsobiacim vstupným signálom.

Imitancná funkcia, ktorá opisuje vzťah medzi napätím a prúdom vo vybranom mieste v obvode. (Slovo imitancia vzniklo spojením názvov impedancia a admitancia).

Metódy analýzy sú dobre rozpracované pre lineárne obvody s konštantnými parametrami po teoretickej, aj po numerickej stránke, čo umožňuje rýchlu analýzu zložitých obvodov pomocou počítačov. Otvorené problémy zostávajú pre parametrické a nelineárne obvody.

Zvláštnym prípadom analýzy je tolerančná analýza, ktorá skúma vlastnosti a správanie sa obvodu pri zmene niektorých jeho parametrov. Tieto zmeny môžu byť spôsobené teplotnou závislosťou, časovou závislosťou (starnutím materiálov). Tolerančná analýza skúma aj vlastnosti obvodu ovplyvneného tým, že hodnoty parametrov môže technológia výroby zaručiť iba s istými toleranciami. Ide o skúmanie citlivosti obvodu na zmenu hodnôt parametrov jeho prvkov.

2. **Syntéza** – navrhovanie štruktúry obvodu tak, aby mal požadované vlastnosti. Príkladom môže byť návrh modelu diódy (obr. 8). Syntéza nadväzuje na metódy analýzy, ale všeobecne je obťažnejšia a riešenie nemusí mať vôbec alebo nie je jednoznačné. Metódy syntézy sú zatiaľ rozvinuté najmä pre elektrické filtre, zatiaľ čo pre ostatné obvody málo alebo vôbec nie.

3. **Ohraničená syntéza a identifikácia obvodu** – o obvode a jeho funkciách jestvujú neúplné údaje. Experimentálne a analyticky treba určiť chýbajúce informácie tak, aby bola známa úplná štruktúra obvodu a jeho vlastnosti.

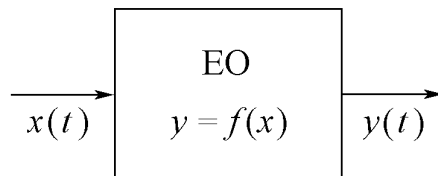
Pretože sa vlastnosti obvodu môžu s časom meniť, či už želaným alebo neželaným spôsobom, analyzujeme obvody obvykle v dvoch režimoch:

Ustálený stav – všetky napätia a prúdy v obvode sú periodickými funkciami času. Špeciálnym prípadom je jednosmerný ustálený stav; vtedy sa hodnoty prúdov a napätí nemenia.

Prechodový stav – nastáva pri prechode z jedného do iného ustáleného stavu. Napätia a prúdy v obvode nie sú periodickými funkciami času.

2.1 Vlastnosti matematického modelu

Signál, ktorý vstupuje do elektrického obvodu, sa pri prechode ním mení (obr. 11). Ako sa zmení, určuje vnútorná štruktúra obvodu. Ak ju poznáme, môžeme obvod matematicky opísať funkciou $y = f(x)$. Keď nie je štruktúra obvodu známa, musíme jeho odozvu na signál zistiť experimentálne meraním.



Obr. 11

V matematickom modeli elektrického obvodu sa vyskytujú výrazy

$$\begin{aligned} u(t) &= i(t)R, & u(t) &= \int \frac{1}{C} i(t)dt + K, & u(t) &= \frac{d}{dt} [Li(t)], \\ i(t) &= u(t)G, & i(t) &= \frac{d}{dt} [Cu(t)], & i(t) &= \int \frac{1}{L} u(t)dt + K. \end{aligned}$$

Vzniká matematický problém, riešiť sústavu integrálno-diferenciálnych rovníc. Je to problém dost' obťažný a výsledok často dostávame po neúnosne dlhom počítaní.

Vhodnou voľbou nezávisle premenných a rôznymi transformáciami môžeme matematický model vyjadriť ako sústavu lineárnych diferenciálnych rovníc. Všeobecne sa dá súvis medzi podnetom a odozvou obvodu opísať diferenciálnou rovnicou

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 = F[x(t)] = f(t),$$

$a_0 \dots a_n$ sú určené parametrami prvkov obvodu, vstupným a výstupným signálom:

$$a_k = a_k[R, L, C, x(t), y(t)].$$

Je jasné, že riešenie diferenciálnej rovnice obvodu nie je vo všeobecnosti vôbec jednoduchou záležitosťou. V modelovaní obvodu preto musíme siahnuť po nejakých zjednodušeníach.

Ďalej sa budeme zaoberať analýzou obvodov zostavených z prvkov, ktorých parametre sú konštanty. Diferenciálna rovnica takéhoto obvodu je lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientmi a s pravou stranou. Tým sme sa obmedzili na lineárne elektrické obvody.

Ak pre pravé strany $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ – vstupné signály – sú riešenia diferenciálnej rovnice funkcie y_1, y_2, \dots, y_m – výstupné signály – tak pre pravú stranu

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + \dots + k_m f_m(t)$$

je riešením funkcia

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_m y_m.$$

Táto vlastnosť má veľmi závažný dôsledok: lineárny elektrický obvod, do ktorého vstupuje súčasne viacero signálov, prenáša každý signál v superpozícii s ostatnými a nezávisle od nich. Tento **princíp superpozície** umožňuje zaviesť mnohé zjednodušenia do riešenia elektrických obvodov, čím ho uľahčí a zrýchli.

V nelineárnych obvodoch princíp superpozície neplatí. Uvažujme obvod, v ktorom je nelineárny prvok $R = R(i)$ s voltampérovou charakteristikou $u = Hi^2$.

Prived' me súčasne dva vstupné signály i_1 a i_2 na tento prvok. Odozva bude

$$u = H(i_1 + i_2) = Hi_1^2 + HHi_2^2 + 2Hi_1i_2.$$

Podľa princípu superpozície by mala byť odozva $u = Hi_1^2 + Hi_2^2$, čo je v rozpore s predošlým výsledkom.

2.2 Operátorový počet

Ukážeme si nevýhody klasického riešenia elektrického obvodu na príklade. Počítajme prúd v obvode z obr. 12. Podľa Kirchhoffovho pravidla pre napätia (ods. 2.3.3) môžeme obvod opísať jedinou rovnicou:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t)dt + K = E \sin \omega t$$

po vhodnej transformácii

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + K,$$

a z toho

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt},$$

treba riešiť obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C = E \sin \omega t$$

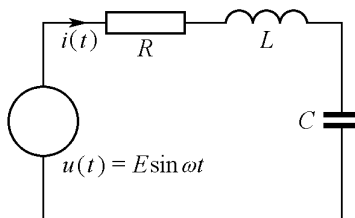
druhého rádu s konštantnými koeficientmi a s pravou stranou. Riešením je

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) + \alpha_1 k_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 k_2 e^{\alpha_2 t},$$

kde

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{LC} \sqrt{\frac{R^2 C}{4L} - 1}$$

sú korene charakteristickej rovnice, k_1 a k_2 sú integračné konštanty dané začiatočnými podmienkami.



Obr. 12

Prvý člen výsledku udáva ustálený prúd v obvode, druhé dva členy popisujú deje, ktoré prebiehajú v obvode po pripojení zdroja (prechodový jav). Oba členy exponenciálne [$e^{-tR/(2L)}$] s časom klesajú a po dobe $5 \cdot (2L/R)$ je ich veľkosť približne 0,007 maximálnej hodnoty, teda prakticky zanedbateľná – prechodový jav považujeme za ukončený.

Ak nás zaujíma iba hodnota ustáleného prúdu v obvode, tak vyjdeme z predpokladu, že vzhľadom na charakter zdroja bude aj ustálený prúd harmonickou funkciou času $i(t) = I \sin(\omega t + \varphi)$. Pretože v ustálenom stave bude aj napätie na kondenzátore harmonickou funkciou času, je $K = 0$.

Po dosadení $i(t)$ do rovnice obvodu dostaneme algebraickú rovnicu

$$RI \sin(\omega t + \varphi) + \omega LI \cos(\omega t + \varphi) - \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi) = E \sin \omega t.$$

Použijeme súčtové vety, upravíme ľavú stranu rovnice a porovnáme koeficienty na oboch stranách pri $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$. Dostaneme dve rovnice a ich riešenie je

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad \varphi + \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Určíme

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right),$$

čo zodpovedá ustálenej zložke prúdu v obvode, vypočítanej v predošlom riešení.

Druhý spôsob riešenia je o niečo rýchlejší, avšak uvedený príklad ukazuje, že elementárny matematický postup je síce presný, ale dlhý a namáhavý. Preto boli vypracované metódy, ktoré vhodnými transformáciami podstatne urýchľujú riešenie podobných problémov pri zachovaní exaktnosti.

Prvým krokom k zjednodušeniu je úvaha: v ustálenom stave sú prúdy a napätia v elektrických obvodoch periodickými funkciami času. Funkcie, s ktorými sa obvykle pri riešení elektrických obvodov stretáme, spĺňajú nasledovné (Dirichletove) podmienky:

1. funkcia je na intervale dĺžky 2π obmedzená
2. počet bodov nespojitosti, maxím a miním je na intervale dĺžky 2π konečný.

Každá periodická funkcia, ktorá spĺňa Dirichletove podmienky, sa dá vyjadriť Fourierovým radom, čo je súčet harmonických funkcií s premennou amplitúdou a kmitočtom.

Stačí nám teda poznať jednoduchú metódu na riešenie obvodov pre ustálený harmonický stav. Neharmonické priebehy periodických elektrických veličín nahradíme ich Fourierovými radmi a výsledná odozva je na základe princípu superpozície súčtom odoziev na jednotlivé členy radu. Táto úvaha viedla k vytvoreniu symbolicko-komplexného zobrazenia harmonických veličín.

2.2.1 Symbolicko-komplexné zobrazenie

Vzhľadom na vlastnosti exponenciálnej funkcie, najmä na Eulerove vzťahy

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x, \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

môžeme každej harmonickej funkcii $u(t) = V \sin(\omega t + \varphi)$ alebo $w(t) = V \cos(\omega t + \varphi)$ priradiť komplexnú veličinu $\tilde{v} = V e^{j(\omega t + \varphi)}$. Nazveme ju **komplexor** a chápeme ju ako „akýsi obraz“ harmonickej veličiny.

Pozor! V ďalšom výpočte sa musíme pridržať prvého priradenia a nemôžeme v ňom ľubovoľne vymieňať priradenia obrazu pre sínus a kosínus. Ak sme komplexor \tilde{v} priradili $u(t) = V \sin(\omega t + \varphi)$, tak je definovaný aj komplexor pre $w(t) = V \cos(\omega t + \varphi) = V \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$, a teda

$$\tilde{w} = V e^{j(\omega t + \varphi + \pi/2)} = j \tilde{v} \quad \text{a} \quad w(t) = \text{Im}\{V e^{j(\omega t + \varphi + \pi/2)}\}.$$

Komplexoru spätne priradíme predmet (originál) – harmonicкую funkciu

$$u(t) = \text{Im}\{V e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \text{Im}\{\tilde{v}\} \quad \text{alebo} \quad w(t) = \text{Re}\{V e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \text{Re}\{\tilde{v}\}.$$

Komplexor môžeme rozpísať do viacerých tvarov:

$$\tilde{v} = v e^{j(\omega t + \varphi)} = v \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = \mathbf{v} e^{j\omega t}.$$

Zavedli sme nový symbol \mathbf{v} , pre ktorý platí rovnosť $\mathbf{v} = V e^{j\varphi}$; je to *komplexná amplitúda* harmonickej veličiny a skrátene ju budeme nazývať **fázorom**.

$$\mathbf{v} = V e^{j\varphi} = V(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Z fázora možno určiť φ a V a potom mu spätne priradiť originál harmonickej funkcie. Reálna časť fázora je $\text{Re}\{\mathbf{v}\} = V \cos \varphi$, imaginárna časť je $\text{Im}\{\mathbf{v}\} = V \sin \varphi$. Z vlastností komplexných čísel vyplýva

$$V = |\mathbf{v}|; \quad \varphi = \arctg \frac{\text{Im}\{\mathbf{v}\}}{\text{Re}\{\mathbf{v}\}}.$$

Originál harmonickej funkcie je $u(t) = |\mathbf{v}| \sin\left(\omega t + \arctg \frac{\text{Im}\{\mathbf{v}\}}{\text{Re}\{\mathbf{v}\}}\right)$

V tomto učebnom texte budeme fázor označovať tučnými písmenami, ako je to zvykom v literatúre. Pretože rovnakým spôsobom bývajú v textoch označené aj vektory, často sa môžete stretnúť s pojmom vektor napätia alebo vektor prúdu.

Geometricky si môžeme komplexor $\tilde{v} = (Ve^{j\varphi})e^{j\omega t}$ predstaviť ako fázor \mathbf{v} , ktorý rotuje v Gaussovej rovine okolo začiatku uhlovou rýchlosťou ω . Fázor v tejto geometrickej interpretácii je úsečka dĺžky V , ktorá vychádza zo začiatku a od reálnej osi je natočená v čase $t = 0$ o uhol φ .

Zo známeho fázora teda vieme určiť komplexor aj originál harmonickej funkcie. Pri riešení obvodu preto nahradíme harmonickej funkcie jej fázorom a ďalej pracujeme už iba s ním.

Pre ďalšie použitie komplexorov a fázorov (obrazov) je dobré poznať ich základné vlastnosti. Pripomíname znovu, že nezáleží na tom, ktorej harmonickej funkcii priradíme komplexor. Tohto priradenia sa však treba počas celej úvahy a výpočtu držať a ten istý komplexor nemožno súčasne priradiť aj druhej harmonickej funkcii. Ak je komplexor priradený funkcii $v(t) = V\sin(\omega t + \varphi)$, tak fázor funkcie $w(t) = V\cos(\omega t + \varphi)$ je už určený. Platí $w(t) = V\cos(\omega t + \varphi) = V\sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$, takže $\mathbf{w} = \mathbf{v}e^{j\pi/2} = j\mathbf{v}$.

Vlastnosti fázorov:

1. Fázor reálneho čísla k je samo číslo: $\mathbf{k} = ke^{j0} = k$
2. Fázor funkcie $k \cdot v(t)$ je $k\mathbf{v}$

$$\widetilde{k v(t)} = k(Ve^{j(\omega t + \varphi)}) = (kVe^{j\varphi})e^{j\omega t} = (k\mathbf{v})e^{j\omega t}, \quad \text{teda fázor } k \cdot v(t) = k\mathbf{v}.$$

3. Fázor súčtu sa rovná súčtu fázorov.

Funkciám $v_1(t) = V_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ a $v_2(t) = V_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ priradíme komplexory

$$\tilde{v}_1 = V_1e^{j(\omega t + \varphi_1)} \quad \text{a} \quad \tilde{v}_2 = V_2e^{j(\omega t + \varphi_2)}.$$

Komplexor súčtu je

$$\widetilde{v_1 + v_2} = V_1e^{j(\omega t + \varphi_1)} + V_2e^{j(\omega t + \varphi_2)} = (V_1e^{j\varphi_1})e^{j\omega t} + (V_2e^{j\varphi_2})e^{j\omega t} = (V_1e^{j\varphi_1} + V_2e^{j\varphi_2})e^{j\omega t} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)e^{j\omega t}$$

teda fázor $[v_1(t) + v_2(t)] = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

4. Dve funkcie sa navzájom rovnajú vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú ich fázory. Ak $v_1 = v_2$, potom $v_1 - v_2 = 0$. Podľa vlastnosti 3. a 1. $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 0$, teda aj $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Ak $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, potom $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 0$ a podľa 3. vlastnosti je $(v_1 - v_2) = 0$, teda aj $v_1 = v_2$.

5. Fázor derivácie harmonickej funkcie možno nahradiť súčinom fázora funkcie a výrazu $j\omega$. Ak $v(t) = V\sin(\omega t + \varphi)$, potom

$$\frac{d\widetilde{v(t)}}{dt} = \frac{d}{dt} [Ve^{j(\omega t + \varphi)}] = j\omega Ve^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega Ve^{j\varphi})e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{v}e^{j\omega t}$$

fázor $\frac{dv(t)}{dt} = j\omega \mathbf{v}$.

6. Fázor neurčitého integrálu harmonickej funkcie sa rovná súčinu fázora funkcie s $1/j\omega$.

$$\int \widetilde{v(t)} dt = \int V e^{j(\omega t + \varphi)} dt = \frac{V}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} + K = \left(\frac{V}{j\omega} e^{j\varphi} \right) e^{j\omega t} + K = \frac{\mathbf{v}}{j\omega} e^{j\omega t} + K.$$

V ustálenom stave musí byť výsledok harmonickej funkciou času, preto $K = 0$ a fázor $\int V e^{j(\omega t + \varphi)} dt = \frac{\mathbf{v}}{j\omega}$.

Vlastnosti 5. a 6. umožňujú nahradiť matematické operácie derivácie a integrácie algebraickými operáciami násobenia a delenia činiteľom $j\omega$. Symbolicko-komplexné zobrazenie teda umožňuje premeniť integrálno-diferenciálne rovnice obvodov na algebraické rovnice, ktoré môžeme riešiť v obore

komplexných čísel. V týchto rovniciach sa vyskytuje násobiteľ $e^{j\omega t}$, ktorým možno rovnice s komplexormi vydeliť a v ďalšom výpočte pracovať iba s fázormi.

Riešme s použitím symbolicko-komplexného zobrazenia úvodný príklad z tejto kapitoly. Použijeme na matematický model obvodu z obr. 12 (str. 18) postupne vlastnosti fázorov č. 4., 3., 2. spolu s 5. a 6. Obrazom rovnice je:

$$Ri e^{j\omega t} + Lj\omega i e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega} i e^{j\omega t} = E e^{j\omega t}$$

a z toho

$$i = \frac{E}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

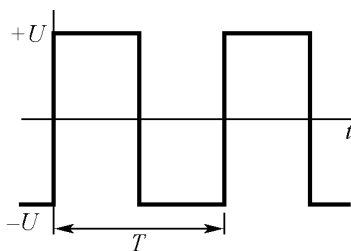
Na určenie $i(t)$ potrebujeme poznať $\text{Im}\{i\}$ a $\text{Re}\{i\}$:

$$\text{Im}\{i\} = \frac{E \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad \text{Re}\{i\} = \frac{ER}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

Ustálený prúd v obvode z obr. 12 je

$$i(t) = \frac{ER}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right),$$

čo zodpovedá predošlým výsledkom.



Obr. 13

V prípade, že sa zaujímate o ustálený stav v obvode na obr. 12, v ktorom nahradíme zdroj harmonického napätia zdrojom obdĺžnikového napätia (obr. 13), dá sa priebeh napätia vyjadriť Fourierovým radom (príklad 17)

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{U}{2l+1} \sin(2l+1)\omega t.$$

Použijeme princíp superpozície a priebežné výsledky pre harmonický signál

$$i_k = \frac{4U}{\pi k \left[R + j \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right) \right]}, \quad \text{kde } k = 2l+1 \quad \begin{array}{l} l = 0, 1, 2, \dots \\ k = 1, 3, 5, \dots \text{ nepárne} \end{array}$$

Potom k -ta zložka ustáleného prúdu je

$$i_k(t) = \frac{4U}{\pi k \sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \sin \left(k\omega t - \arctg \frac{k\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right), \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

Ustálený prúd v obvode je podľa princípu superpozície súčtom zložiek

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} i_k(t) = \frac{2U}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k \sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \sin \left(k\omega t - \arctg \frac{k\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right), \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

Výsledok sme síce dostali rýchlo, je zdanlivo jednoduchý, ale vypočítať súčet radu pre $i(t)$ bude zdĺhavá záležitosť. Tu sa ukážu výhody Laplaceovej a Fourierovej transformácie, pre ktoré existujú obsiahle slovníky spätných transformácií, takže výsledok bude možné dostať za prijateľnú dobu.

2.2.2 Fourierova transformácia

Fourierov rad pre periodickú funkciu

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\Omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\Omega t, \quad \text{kde } \Omega = \frac{2\pi}{T},$$

sa dá vhodným preskupením a použitím Eulerových vzťahov vyjadriť tiež takto:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}, \quad \text{kde } c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\Omega t} dt.$$

Súvis medzi koeficientmi je jednoduchý:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}.$$

Výpočet odozvy obvodu sa však ani po týchto úpravách nezjednoduší, zato postup nám umožní vyrátať odozvu aj na neperiodický signál. To je prípad, keď $T \rightarrow \infty$, vtedy $\Omega \rightarrow 0$. Označme $k\Omega = \omega$, potom $(k+1)\Omega - k\Omega = \Delta\omega = \Omega$ a pre $\Omega \rightarrow 0$ je $\Delta\omega \rightarrow d\omega$. Rozvoj funkcie $f(t)$ do Fourierovho radu prejde na tvar (v integrále pre c_k čas označíme symbolom τ):

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{jk\Omega t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\Omega \tau} d\tau \right] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{jk\Omega t} \Omega \frac{1}{\Omega T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\Omega \tau} d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{j\omega t} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Výraz $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$ je vyjadrením Fourierovej transformácie,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ sa nazýva spätná Fourierova transformácia.}$$

Na spätnú Fourierovu transformáciu treba poznať teóriu funkcie komplexnej premennej, hlavne vetu o rezíduách. Pre prax boli vypracované už spomenuté rozsiahle slovníky spätných transformácií.

$F(j\omega)$ sa nazýva Fourierov obraz, alebo spektrum funkcie $f(t)$. Aby tento obraz existoval, musí byť funkcia po častiach spojitá na každom konečnom intervale a integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ musí konvergovať. Žiaľ, sú mnohé funkcie, ktoré týmto podmienkam nevyhovujú, napr. $f(t) = \text{konšt.}$, $f(t) = \sin \omega t$ a pod.

2.2.3 Laplaceova transformácia

Fourierova transformácia je nepoužiteľná pre funkcie, ktoré nie sú absolútne integrovateľné na intervale $(-\infty, +\infty)$. Aby sľubná metóda integrálnej transformácie viedla k cieľu, prinútime ku konvergencii mnoho funkcií $f(t)$ tým, že ich vynásobíme konvergenčným faktorom e^{-ct} . Potom väčšina prakticky dôležitých funkcií $f(t)e^{-ct}$ bude konvergovať pre $t \rightarrow \infty$. Obrazom funkcie $f(t)$ potom bude

$$F(c, j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ct} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(c+j\omega)t} dt .$$

Zavedieme novú premennú $p = c + j\omega t$ (niekedy nazývanú *komplexný knitočet*). Obrazom funkcie $f(t)$ je

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt .$$

Tým sme definovali Laplaceovu transformáciu, ktorou vo všeobecnosti komplexnej funkcii $f(t)$ nazývanej **originál**, priradíme funkciu $F(p)$ komplexnej premennej, nazývanú **obraz**. Trieda funkcií, pre ktoré existujú obrazy v Laplaceovej transformácii je značne rozsiahla a obsahuje prakticky všetky dôležité funkcie. Nazveme ich \mathcal{L} -funkcie a zavedieme skrátene označenie $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Medzi \mathcal{L} -funkcie patria všetky funkcie, ktoré sú:

1. po častiach spojitá pre všetky $t > 0$
2. exponenciálneho rádu pre $t \rightarrow \infty$ [pozri 1, 2]
3. $f(t) = 0$ pre $t < 0$

Problémy nám nastanú zase pri spätnej transformácii

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) e^{pt} dp ,$$

pre výpočet ktorej sa nezaobídeme bez teórie funkcie komplexnej premennej. Aj pre Laplaceovu transformáciu sú vypracované rozsiahle slovníky, ktoré umožnia obísť zdĺhavé výpočty.

Dá sa dokázať, že $\mathcal{L}\{F(p)\} = 0$ pre $t < 0$. To znamená, že z Laplaceovej transformácie získavame opis fyzikálneho deja pre $t > 0$. Pre $t < 0$ by malo platiť $f(t) = 0$, čo nemusí odpovedať fyzikálnej skutočnosti. Napr. funkcia $f(t) = \sin \omega t$ nepatrí do triedy \mathcal{L} -funkcií. Preto zavádzame **jednotkovú funkciu** (niekedy nazývanú Heavisideova funkcia) $1(t)$

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t < 0 \\ 1/2 & \text{pre } t = 0, \\ 1 & \text{pre } t > 0 \end{cases}$$

pomocou ktorej môžeme triedu \mathcal{L} -funkcií značne rozšíriť. Funkcia $1(t) \cdot \sin \omega t$ už do \mathcal{L} -funkcií patrí.

Fyzikálny rozmer $[p] = s^{-1}$. Aby si obraz zachoval fyzikálny rozmer a formálne vyzerala práca s obrazmi po rozmerovej stránke rovnako ako s originálmi, je vhodné použiť Laplace-Carsonovu transformáciu.

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Napriek tejto, pre fyzikov prítlačlivej transformácii, sa viac používa Laplaceova transformácia, pre jej úzky súvis s Fourierovou. Jestvujú ešte ďalšie používané integrálne transformácie – dvojstranná Laplaceova, Mellinova, Hankelova – ale pre teóriu obvodov sa rozšírila najmä Laplaceova. Uvedme si niektoré jej vlastnosti. [Laplaceovým obrazom funkcie $f(t)$ je $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$]

1. Veta o linearite

Ak $f(t) = \sum_i a_i f_i$, potom

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(t) \right) e^{-pt} dt = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^{\infty} f_i(t) e^{-pt} dt = \sum_{i=1}^{\infty} a_i F_i(p).$$

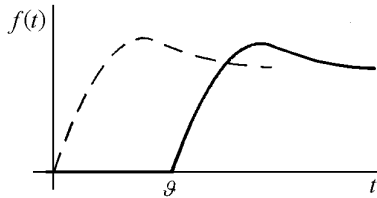
2. Veta o zmene mierky (o podobnosti)

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau/a} d\tau/a = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

3. Veta o translácii

Funkcia na obr. 14 sa dá vyjadriť ako $f(t - \vartheta)$, pretože pre $t < \vartheta$ je $f(t) = 0$. Potom je

$$\mathcal{L}\{f(t - \vartheta)\} = \int_0^{\infty} f(t - \vartheta) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p(\tau + \vartheta)} d\tau = e^{-p\vartheta} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-p\vartheta} F(p).$$



Obr. 14

4. Veta o obraze derivácie

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = -f(0+) + pF(p).$$

Použili sme integráciu per partes a $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$, t. j. limitu v nule sprava. Pre funkciu nespojitú v bodoch t_k možno odvodiť vzťah pre Laplaceov obraz

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = pF(p) - f(0+) - \sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{-pt},$$

kde s_k je skok funkcie v bode t_k .

5. Veta o obraze integrálu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} &= \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \int_0^t f(\tau)d\tau \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(\tau)d\tau = \\ &= \frac{F(p)}{p} + \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t f(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

použili sme integráciu per partes, deriváciu integrálu podľa parametra a vlastnosti \mathcal{L} funkcie.

6. Veta o derivácii obrazu

$$\frac{dF(p)}{dp} = \frac{d}{dp} \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt} dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt} dt,$$

teda
$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(p)}{dp}.$$

7. Veta o integrále obrazu

$$\int_p^\infty F(p)dp = \int_p^\infty \left[\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt\right] dp = \int_0^\infty f(t) \left[\int_p^\infty e^{-pt} dp\right] dt = \int_0^\infty f(t) \left[\frac{e^{-pt}}{-t}\right]_p^\infty dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt,$$

teda
$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(p)dp.$$

Poznámka: vety 4., 5., 6., 7. možno rozšíriť pre n -násobné derivácie a integrácie. Odvodenie ponechávame čitateľovi, resp. dá sa nájsť v literatúre.

8. Veta o konvolúcii (Borelova veta)

Ak $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(p)$ a $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(p)$, pýtame sa na predmet ku súčinu $F_1(p) \cdot F_2(p)$. Vynásobíme rovnosť $F_1(p) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-pt} dt$ výrazom $F_2(p)$.

$$F_1(p) \cdot F_2(p) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-pt} F_2(p) dt;$$

podľa vety 3. je $e^{-pt} F_2(p) = \int_0^\infty f_2(\tau-t)e^{-p\tau} d\tau$. Pretože pre $t > \tau$ je $f_2(\tau-t) = 0$ [podmienka, aby $f(t)$ bola \mathcal{L} funkcia], je

$$\begin{aligned} F_1(p) \cdot F_2(p) &= \int_0^\tau f_1(t) \left[\int_0^\infty f_1(t)e^{-pt} F_2(p) d\tau\right] dt = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^\tau f_1(t)f_2(\tau-t) dt\right] d\tau = \\ &= \mathcal{L}\left\{\int_0^\tau f_1(t)f_2(\tau-t) dt\right\}. \end{aligned}$$

Integrál $\int_0^\tau f_1(t)f_2(\tau-t) dt = \int_0^\tau f_1(\tau-t)f_2(t) dt$ sa nazýva **konvolúcia** funkcií $f_1(t)$ a $f_2(t)$.

9. Mnohé problémy sa dajú riešiť pomocou **viet o limitách**:

a) Vyjdeme z vety 4 o obraze derivácie

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p) - f(0+)],$$

p v integrále na ľavej strane je konštanta, takže integrand pre $p \rightarrow \infty$ je rovný nule. Preto

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p)] - f(0+) = 0.$$

Výsledok $\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p)] = f(0+)$ sa niekedy nazýva aj **veta o začiatkovej hodnote**.

b) Podobne ako v predchádzajúcom prípade určíme limitu

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p) - f(0+)].$$

Upravíme ľavú stranu rovnosti. V integrále je p konštanta

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0+).$$

Porovnaním oboch strán dostaneme výsledok

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p)] = \lim_{t \rightarrow 0} f(t),$$

ktorý sa nazýva **veta o konečnej hodnote**.

c) $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = 0$ pretože p v integráli je konštanta. Táto vlastnosť dovoľuje rýchlu orientačnú kontrolu správnosti určenia $F(p)$ z $f(t)$.

Príklady 2 – 13: Väčšina nami používaných funkcií je definovaná pre čas $t \in (-\infty, \infty)$, preto musíme ich definíciu trochu upraviť. Vo všetkých prípadoch budeme mlčky predpokladať, že ide nie o funkciu $f(t)$, ale o $f(t) \cdot 1(t)$, pričom jednotkovú funkciu budeme písať iba tam, kde by mohlo prísť k nejednoznačnosti. Odkaz na vlastnosť n označíme v texte „*n“, ak ide o príklad n , tak „prn“.

Príklad 2

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Dôsledok: $\mathcal{L}\{K\} = \mathcal{L}\{K \cdot 1(t)\} = K \cdot \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{K}{p}$.

Príklad 3

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \left[-\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}.$$

Dôsledok: Ak $a = j\omega$

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = \mathcal{L}\{\cos \omega t + j \sin \omega t\} \stackrel{*1}{=} \mathcal{L}\{\cos \omega t\} + j \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{p - j\omega} = \frac{p + j\omega}{p^2 + \omega^2}; \text{ teda}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad \text{a} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Príklad 4

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{Ae^{-jb} \sin(\omega t + \varphi)\}$; Použijeme predošlé výsledky:

$$\begin{aligned} f(t) &\stackrel{*1}{=} \text{Im}\{Ae^{-jb} e^{j(\omega t + \varphi)}\} \stackrel{pr3}{=} \text{Im}\left\{A e^{j\varphi} \frac{1}{p + b - j\omega}\right\} = \text{Im}\left\{A e^{j\varphi} \frac{p + b + j\omega}{(p + b)^2 + \omega^2}\right\} = \\ &= A e^{j\varphi} \frac{(p + b) \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{(p + b)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Príklad 5

$$\mathcal{L}\{t e^{at}\} \stackrel{*6}{=} -\frac{d}{dp} \mathcal{L}\{e^{at}\} \stackrel{pr3}{=} -\frac{d}{dp} \frac{1}{p - a} = \frac{1}{(p - a)^2}.$$

Príklad 6

$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt$; zavedieme substitúciu $pt = x$. Potom $t^n = (x/p)^n$ a $dt = dx/p$. Pre $n > -1$ je

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}.$$

Dôsledky:

Ak je n celé kladné číslo, tak $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/(p^{n+1})$

$$\mathcal{L}\{t^{n-1/2}\} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{1}{p^n} \sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

pre $n = 1$ je
$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

pre $n = 0$ je
$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Príklad 7

Chceme vyčíslit' integrál $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

Zavedieme funkciu $\text{Si}(t) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ (integrálsinus)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} \stackrel{*7}{=} \int_p^\infty \mathcal{L}\{\sin t\} dt \stackrel{pr2}{=} \int_p^\infty \frac{1}{p^2 + 1} dp = [\arctg p]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg p = \text{arccotg } p,$$

$$\mathcal{L}\{Si(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int \frac{\sin t}{t} dt\right\} \stackrel{*5}{=} \frac{1}{p} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{\operatorname{arccotg} p}{p}.$$

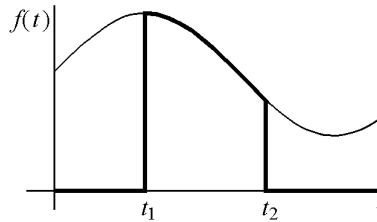
Takže hľadaný výsledok je:

$$\left\{\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt\right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{Si(t)\} \stackrel{*9b}{=} \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{\operatorname{arccotg} p}{p}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Príklad 8. Laplaceov obraz jedného impulzu konečnej dĺžky

Z funkcie $f(t)$ definovanej pre $t \in (0, \infty)$ „vyrežeme“ impulz konečnej dĺžky (obr. 15) takto: Najprv odrežeme časť pre $t < t_1$

$$f(t) \cdot \mathbf{1}(t-t_1) = \begin{cases} f(t) & \text{pre } t > t_1 \\ 0 & \text{pre } t < t_1 \end{cases}.$$



Obr. 15

Potom počínajúc časom t_2 odčítame od funkcie $f(t) \cdot \mathbf{1}(t-t_1)$ funkciu $f(t) \cdot \mathbf{1}(t-t_2)$, takže

$$f_{\Delta}(t) = f(t) \cdot \mathbf{1}(t-t_1) - f(t) \cdot \mathbf{1}(t-t_2) = \begin{cases} f(t) & \text{pre } t \in (t_1, t_2) \\ 0 & \text{pre } t < t_1 \text{ a } t > t_2 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} F_{\Delta}(p) &= \mathcal{L}\{f_{\Delta}(t)\} = \int_0^{\infty} [f(t) \cdot \mathbf{1}(t-t_1) - f(t) \cdot \mathbf{1}(t-t_2)] e^{-pt} dt = \\ &= \int_{t_1}^{\infty} [f(t) \cdot \mathbf{1}(t-t_1)] e^{-pt} dt - \int_{t_2}^{\infty} [f(t) \cdot \mathbf{1}(t-t_2)] e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Po substitúciách $\tau = t - t_1$ resp. $\tau = t - t_2$

$$\begin{aligned} F_{\Delta}(p) &= \mathcal{L}\{f_{\Delta}(t)\} = \int_{t_1}^{\infty} f(\tau+t_1) \cdot \mathbf{1}(\tau) e^{-p(\tau+t_1)} d\tau - \int_{t_2}^{\infty} f(\tau+t_2) \cdot \mathbf{1}(\tau) e^{-p(\tau+t_2)} d\tau = \\ &= e^{-p(\tau+t_1)} \mathcal{L}\{f(\tau+t_1)\} - e^{-p(\tau+t_2)} \mathcal{L}\{f(\tau+t_2)\}. \end{aligned}$$

Obyčajne v praxi volíme $f(t)$ tak, aby bolo $t_1 = 0$.

Príklad 8a

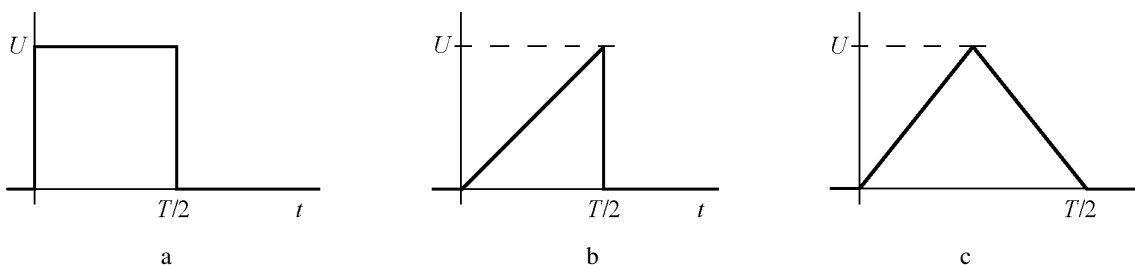
Obraz impulzu $f_{\Delta}(t) = U - U \cdot \mathbf{1}(t - T/2)$ z obr. 16a je

$$\mathcal{L}\{f_{\Delta}(t)\} = F(p) - e^{-pT/2} \mathcal{L}\{f(t+T/2)\} = \frac{U}{p} - e^{-pT/2} \frac{U}{p} = \frac{U}{p} (1 - e^{-pT/2}).$$

Príklad 8b

Obraz impulzu $f_{\Delta}(t) = \frac{2Ut}{T} [1 - \mathbf{1}(t + T/2)]$ z obr. 16b je (substitúcia $\tau = t - T/2$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_{\Delta}(t)\} &\stackrel{*6}{=} \frac{2U}{T} \frac{1}{p^2} - e^{-pT/2} \cdot \frac{2U}{T} \mathcal{L}\{(\tau + T/2)\} \stackrel{*1}{=} \frac{2U}{T} \left(\frac{1}{p^2} - e^{-pT/2} \mathcal{L}\{\tau\} - e^{-pT/2} \mathcal{L}\{T/2\} \right) \stackrel{*6,1}{=} \\ &\stackrel{*6,1}{=} \frac{2U}{T} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-pT/2} - \frac{T}{2p} e^{-pT/2} \right) = \frac{2U}{T} \frac{1}{p^2} \left[1 - \left(1 + \frac{pT}{2} \right) e^{-pT/2} \right]. \end{aligned}$$



Obr. 16

Príklad 8c

Impulz z obr. 16c získame zložením funkcií $\frac{Ut}{T/4}$, $-\frac{2Ut}{T/4}$ posunutej po časovej osi o $T/4$ a $\frac{Ut}{T/4}$ o $T/2$ doprava. Obraz impulzu konečnej dĺžky je

$$f_{\Delta}(t) = \frac{4Ut}{T} \cdot \mathbf{1}(t) - \frac{8U}{T} (t - T/4) \cdot \mathbf{1}(t - T/4) + \frac{4U}{T} (t - T/2) \cdot \mathbf{1}(t - T/2),$$

s využitím vety o translácii (3. veta) a príkladu 6. je

$$F_{\Delta}(p) = \frac{4U}{T} \frac{1}{p^2} (1 - 2e^{-pT/4} + e^{-pT/2}) = \frac{4U}{T} \left(\frac{1 - e^{-pT/4}}{p} \right)^2.$$

Príklad 9

Periodickú funkciu získame tak, že impulz konečnej dĺžky posúvame po časovej osi o k -násobok periódy (k je celé číslo) doprava (obr. 17a). $f(t) = f_{\Delta}(t) + f_{\Delta}(t - T) + f_{\Delta}(t - 2T) + f_{\Delta}(t - 3T) + \dots$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} f_{\Delta}(t - kT) \right\} \stackrel{*1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}\{f_{\Delta}(t - kT)\} \stackrel{*3}{=} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT} F_{\Delta}(p) = F_{\Delta}(p) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT} = \\ &= F_{\Delta}(p) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-kpT}}{1 - e^{-pT}} = \frac{F_{\Delta}(p)}{1 - e^{-pT}}. \end{aligned}$$

Podobne vypočítame pre antiperiodickú funkciu (obr. 17b)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F_{\Delta}(p)}{1 + e^{-pT}}.$$

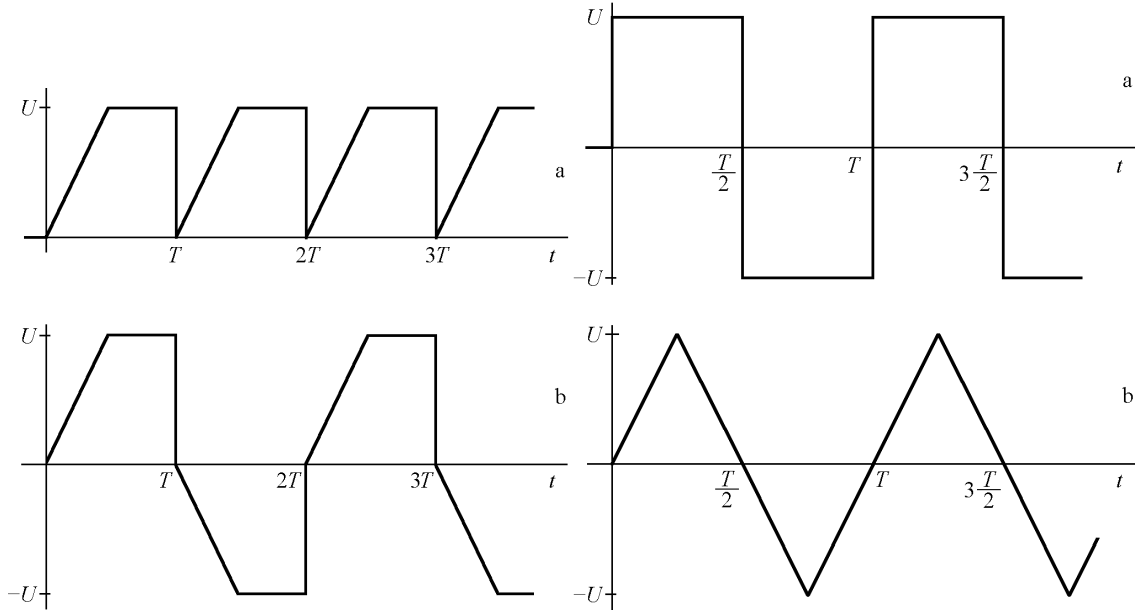
Príklad 10

Obraz obdĺžnikového napätia (obr. 18a) s použitím výsledkov príkladov 9 a 8a je

$$F(p) = \frac{U}{p} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} = \frac{U}{p} \operatorname{tgh} \frac{pT}{4}.$$

Obraz trojuholníkového napätia z obr. 18b je (použijeme výsledky príkladov 9 a 8c)

$$F(p) = \frac{4U}{p^2 T} \frac{(1 - e^{-pT/4})^2}{1 + e^{-pT/2}}.$$



Obr. 17

Obr. 18

Príklad 11

Do obvodu z obr. 12 pripojíme v čase $t=0$ jednosmerné napätie U . Aký je priebeh prúdu $i(t)$ v obvode?

Obvod je opísaný rovnicou:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u \quad \text{kde} \quad \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{pre } t \leq 0 \\ u = U \quad \text{pre } t > 0 \end{array}$$

V čase $t=0$ náboj na kondenzátore a prúd cez obvod sú nulové, takže $i(0+) = 0$ a $u_C(0+) = 0$. Laplaceov obraz rovnice obvodu je (pri využití vlastností 1., 4., 5.) $\left(R + pL + \frac{1}{pC}\right) \cdot I(p) + i(0+) + u_C(0+) = \frac{U}{p}$,

z toho obraz prúdu je:

$$I(p) = \frac{U}{p} \frac{1}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{UC}{p^2 LC + \frac{pR}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} \left(\frac{1}{p - p_2} - \frac{1}{p - p_1} \right).$$

Korene menovateľa sú $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Podľa výsledkov príkladu 3. je

$$i(t) = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{U}{L} e^{-tR/2L} \frac{\sin\left(t \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Príklad 12

Obraz prúdu v obvode na obr. 12 je podľa predošlých výsledkov

$$I(\mathbf{p}) = \frac{U\omega}{(\mathbf{p}^2 + \omega^2)\left(R + \mathbf{p}L + \frac{1}{\mathbf{p}C}\right)} = \frac{U\omega}{L} \frac{\mathbf{p}}{\left(\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{p}R}{L} + \frac{1}{LC}\right)}.$$

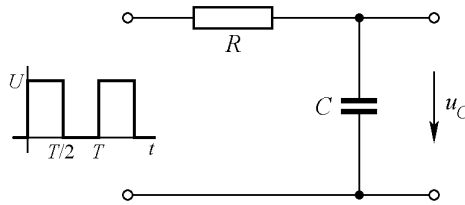
Príklad 13

Aký je obraz napätia na kondenzátore C v obvode na obr. 19a, ak v okamihu zapojenia zdroja nebol kondenzátor nabitý [$u_C(0+) = 0$]

Použijeme postup z kap. 2.2. Vzťah pre napätie na kondenzátore je

$$u(t) = RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t).$$

Obrazom tejto rovnice (použijeme vety 1. a 3.) je $u(\mathbf{p}) = RC\mathbf{p}u_C(\mathbf{p}) + u_C(0+) + u_C(\mathbf{p})$. Obraz napätia na kondenzátore je $u_C(\mathbf{p}) = \frac{u(\mathbf{p})}{1 + \mathbf{p}RC}$.



Obr. 19a

Určíme obraz vstupného napätia. Impulz konečnej dĺžky $u_\Delta = U - U \cdot 1(t - T/2)$ budeme posunovať o úseky dĺžky T po časovej ose doprava:

$$u_\Delta(t) = u_\Delta + u_\Delta \cdot 1(t - T) + u_\Delta \cdot 1(t - 2T) + \dots$$

Podobne ako v príklade 8. a 9. vypočítame $u(\mathbf{p}) = \frac{U}{\mathbf{p}} \frac{1 - e^{-\mathbf{p}T/2}}{1 - e^{-\mathbf{p}T}} = \frac{U}{\mathbf{p}} \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{p}T/2}}$. Obraz napätia na

kondenzátore je $u_C(\mathbf{p}) = \frac{U}{RC} \frac{1}{\mathbf{p}(\mathbf{p} + 1/RC)(1 + e^{-\mathbf{p}T/2})}$.

2.2.4 Spätná Laplaceova transformácia

V príkladoch 12 a 13 sme neurčili originály k nájdeným obrazom. Pomerne jednoduché to bude v príklade 12, kde $F(\mathbf{p})$ rozložíme na súčet štyroch zlomkov a použijeme pritom metódy známe pri integrovaní racionálnej lomenej funkcie. Celý ďalší výpočet je vlastne úprava zlomkov s využitím súčtových viet pre harmonické funkcie. Tento postup nemožno použiť v poslednom príklade, lebo menovateľ zlomku nie je polynóm premennej \mathbf{p} . Tu treba použiť vetu o rezíduách.

Ak a je pól funkcie $F(\mathbf{p})$, tak $F(a) \rightarrow \infty$, a krivkový integrál $\oint_C F(\mathbf{p})d\mathbf{p} = 2\pi j \text{ rez}$, kde C je uzavretá krivka obopínajúca bod a v rovine \mathbf{p} a rez je rezíduum funkcie $F(\mathbf{p})$ v bode a (koeficient pri člene $1/(\mathbf{p} - a)$ rozvoja $F(\mathbf{p})$ do Laurentovho radu).

V teórii obvodov zvyčajne volíme za krivku C Bromwichovu cestu, čo je čiara idúca z bodu $c - j\infty$ do $c + j\infty$, ktorá obopína polrovinu $\text{Re}\{\mathbf{p}\} < c$. V tejto polrovine môže byť samozrejme viacero pólov,

teda podľa vety o rezíduách je $\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mathbf{p})d\mathbf{p} = \sum \text{rez}$, kde $\sum \text{rez}$ je súčet rezíduí funkcie $F(\mathbf{p})e^{pt}$ v rovine $\text{Re}\{\mathbf{p}\} < c$.

Pri spätnej transformácii k Laplaceovmu obrazu musíme teda hľadať rezíduá funkcie $F(\mathbf{p})e^{pt}$. Pri riešení obvodov zistíme, že veľmi často sa dá použiť rovnosť $F(\mathbf{p}) = N(\mathbf{p})/M(\mathbf{p})$, kde $M(\mathbf{p})$ a $N(\mathbf{p})$ sú vďaka Laplaceovej transformácii holomorfné funkcie. Hľadáme rezíduá (pre všetky póly) tejto funkcie.

1. Jeden **jednoduchý pól** v bode a znamená, že je

$$\frac{N(\mathbf{p})}{M(\mathbf{p})} = \frac{N(\mathbf{p})}{(\mathbf{p}-a)m(\mathbf{p})} = \frac{A_{-1}}{\mathbf{p}-a} + A_0 + A_1(\mathbf{p}-a) + A_2(\mathbf{p}-a)^2 + \dots$$

Z Laurentovho radu určíme rezíduum A_{-1} tak, že rad vynásobíme koreňovým činiteľom $(\mathbf{p}-a)$ a vypočítame limitu pre $\mathbf{p} \rightarrow a$

$$\text{rez}(a) = \lim_{\mathbf{p} \rightarrow a} \left[\frac{N(\mathbf{p})}{M(\mathbf{p})} (\mathbf{p}-a) \right] = \lim_{\mathbf{p} \rightarrow a} [F(\mathbf{p})(\mathbf{p}-a)].$$

Nie vždy vieme určiť funkciu $m(a) = M(a)/(\mathbf{p}-a)$; vtedy použijeme na výpočet limity l'Hospitalovo pravidlo. Potom

$$\text{rez}(a) = \frac{N(a)}{M'(a)}, \quad \text{kde} \quad M'(a) = \left[\frac{dM(\mathbf{p})}{d\mathbf{p}} \right]_{\mathbf{p}=a}.$$

Ak je viacero jednoduchých pólov a_1, a_2, \dots , tak súčet rezíduí získame opakovaním uvedeného postupu pre každý pól:

$$\sum_k \text{rez}(a_k) = \sum_k \frac{N(a_k)}{M'(a_k)}.$$

2. Pre **viacnásobný pól** [n -násobný koreň $M(\mathbf{p})$] je rozvoj funkcie do Laurentovho radu:

$$\frac{N(\mathbf{p})}{M(\mathbf{p})} = \frac{N(\mathbf{p})}{(\mathbf{p}-a)^n m(\mathbf{p})} = \frac{A_{-n}}{(\mathbf{p}-a)^n} + \dots + \frac{A_{-1}}{\mathbf{p}-a} + A_0 + A_1(\mathbf{p}-a) + A_2(\mathbf{p}-a)^2 + \dots$$

Rad vynásobíme výrazom $(\mathbf{p}-a)^n$, výsledok $(n-1)$ -krát derivujeme a položíme $\mathbf{p} = a$. Výsledok je

$$\left\{ \frac{d^{n-1}}{d\mathbf{p}^{n-1}} \left[(\mathbf{p}-a)^n \frac{N(\mathbf{p})}{M(\mathbf{p})} \right] \right\}_{\mathbf{p}=a} = (n-1)! A_{-1} \text{ a dáva priamo návod na určenie rezídua:}$$

$$A_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{d\mathbf{p}^{n-1}} \left[(\mathbf{p}-a)^n \frac{N(\mathbf{p})}{M(\mathbf{p})} \right] \right\}_{\mathbf{p}=a}.$$

3. **Viacero viacnásobných pólov**

Pri riešení obvodov bude $F(\mathbf{p}) = N(\mathbf{p})/M(\mathbf{p})$ racionálnou lomenou funkciou, pričom stupeň polynómu $N(\mathbf{p})$ je menší ako stupeň $M(\mathbf{p})$. Ak korene $M(\mathbf{p})$ sú a_1, a_2, \dots, a_m , potom môžeme $F(\mathbf{p})$ vyjadriť pomocou koreňových činiteľov:

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{\mathbf{p}-a_k},$$

kde A_k určíme podobne ako rezíduum v póle a_k , t. j.

$$A_k = \lim_{\mathbf{p} \rightarrow a_k} [F(\mathbf{p})(\mathbf{p}-a_k)] = \frac{N(a_k)}{M'(a_k)}.$$

Ak je koreň a_k jednoduchý, tak A_k je vlastne rezíduum v tomto koreni menovateľa. Keď je a_k viacnásobný, je postup trochu zdĺhavejší. Pre k -ty koreň, ktorý je l_k -násobný, bude rozklad vyzerat' takto:

$$\dots + \frac{A_{k1}}{p - a_k} + \frac{A_{k2}}{(p - a_k)^2} + \dots + \frac{A_{kl}}{(p - a_k)^{l_k}} + \dots, \quad \text{teda} \quad F(p) = \sum_k \sum_l \frac{A_{kl}}{(p - a_k)^l}.$$

Koeficient A_{kl} určíme tak, že $F(p)$ vynásobíme $(p - a)^{l_k}$, urobíme l -tu deriváciu a položíme $p = a_k$:

$$\frac{d^l}{dp^l} [F(p)(p - a)^{l_k}]_{p=a_k} = l! A_{kl}.$$

Ak zameníme $(l_k - l)$ a l , tak

$$A_{kl} = \frac{1}{(l_k - l)!} \frac{d^{(l_k - l)}}{dp^{(l_k - l)}} [F(p)(p - a)^{l_k}]_{p=a_k}.$$

Originály k týmto obrazom určíme podľa výsledkov príkladu 3. a vlastnosti 6.

K obrazu $F(p) = \sum_k \frac{A_k}{p - a_k}$ je originál $f(t) = \sum_k A_k e^{a_k t} = \sum_k \frac{N(a_k)}{M'(a_k)} e^{a_k t}$,

k obrazu $F(p) = \sum_k \sum_l \frac{A_{kl}}{(p - a_k)^l}$ je originál $f(t) = \sum_k \sum_l \frac{A_{kl}}{(l-1)!} t^{l-1} e^{a_k t}$

(index k sa týka poradia koreňa a l jeho násobnosti). Týmto výsledkom sa hovorí tiež **Heavisideova 2. veta o rozklade**.

Spätaná transformácia, ako vidíte, nie je jednoduchá, ani rýchla operácia. Aby sa výhody Laplaceovej transformácie zachovali, používa sa pri spätnej transformácii slovník Laplaceových transformácií, v ktorom k danému obrazu nájdeme príslušný predmet.

Príklad 14

Hľadáme originál k obrazu $F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^2(p + 1)^3}$.

Menovateľ má dvojnásobný koreň $p = 0$ a trojnásobný koreň $p = -1$. Ukážeme si tri spôsoby ako nájsť originál.

a) Hľadáme rezíduá funkcie $F(p)e^{pt}$. Rezíduum v bode $p = 0$ určíme z výrazu

$$\text{rez}(0) = \frac{1}{1!} \frac{d}{dp} \left[\frac{p^2 + p + 1}{p^2(p + 1)^3} e^{pt} (p - 0)^2 \right]_{p=0}.$$

Po derivovaní a dosadení za $p = 0$ dostaneme $\text{rez}(0) = -2 + t$. Podobne určíme rezíduum v bode $p = -1$ z výrazu

$$\text{rez}(-1) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p^2 + p + 1}{p^2(p + 1)^3} e^{pt} (p + 1)^3 \right]_{p=-1} = \frac{1}{2} (4e^{-t} + 2te^{-t} + t^2 e^{-t}) = 2e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t}.$$

Teda originálom obrazu $F(p)$ je $f(t) = -2 + t + e^{-t}(2 + t + t^2/2)$.

b) Rozklad obrazu na čiastočné zlomky je

$$F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^2(p + 1)^3} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{B_1}{p + 1} + \frac{B_2}{(p + 1)^2} + \frac{B_3}{(p + 1)^3}.$$

Konštanty A_i určíme tak, že $F(p)$ vynásobíme p^2 :

$$p^2 F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p+1)^3} = A_1 p + A_2 + p^2 \left[\frac{B_1}{p+1} + \frac{B_2}{(p+1)^2} + \frac{B_3}{(p+1)^3} \right].$$

Dosadením $p = 0$ dostaneme $A_2 = 1$. Určíme deriváciu

$$\left[p^2 F(p) \right]' = \frac{(2p+1) - (p^2 + p + 1)3(p+1)^2}{(p+1)^4} = \frac{-p^2 - 2}{(p+1)^4} = A_1 + p G_1(p),$$

kde $G_1(p)$ je racionálna lomená funkcia regulárna v bode $p = -1$. Jej tvar by sme našli derivovaním výrazu

$$p^2 \left[\frac{B_1}{p+1} + \frac{B_2}{(p+1)^2} + \frac{B_3}{(p+1)^3} \right].$$

Bola by to však zbytočná námaha. Na výsledok nemá žiadny vplyv lebo sa vyskytuje v súčine s p . Po dosadení $p = 0$ dostaneme $A_1 = -2$.

Konštanty B_i určíme podobným spôsobom, teda postupným derivovaním výrazu

$$(p+1)^3 F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^2} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \left(\frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} \right) (p+1)^3 + B_1 (p+1)^2 + B_2 (p+1) + B_3.$$

Dosadením $p = -1$ dostaneme $B_3 = 1$

$$\left[(p+1)^3 F(p) \right]' = -\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^3} = (p+1)^2 G_2(p) + 2B_1(p+1) + B_2,$$

$$\left[(p+1)^3 F(p) \right]'' = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^4} = (p+1) G_3(p) + 2B_1.$$

$G_2(p)$, $G_3(p)$ sú racionálne lomené funkcie regulárne v bode $p = -1$, o výsledku ale nerozhodujú, lebo sa vyskytujú v súčine s výrazmi $(p+1)^2$ a $(p+1)$, ktoré majú v bode $p = -1$ hodnotu nula a konštanty B_i sú (pre $p = -1$) $B_2 = 1$, $B_1 = 2$.

Rozklad na čiastočné zlomky vyzerá takto:

$$F(p) = \frac{-2}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3}.$$

Nájďme originál $f(t) = \mathcal{L}\{F(p)\}$, ktorý je podľa vlastnosti 1. rovný súčtu predmetov.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{p} \right\} = -2 \quad (\text{pozri príklad 2}),$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = \left\{ \mathcal{L}^{-1} \frac{d}{dp} \frac{1}{p} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{ t \cdot 1(t) \} = t \quad (\text{pozri vlastnosť 6}),$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p+1} \right\} = 2 e^{-t} \quad (\text{pozri príklad 3 a vlastnosť 1}).$$

Z vlastnosti 6 určíme:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(p+1)^2}\right\} = \left\{\mathcal{L}^{-1}\frac{d}{dp}\frac{1}{p+1}\right\} = t e^{-t},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{dp}\frac{1}{2(p+1)^2}\right\} = t\left(\frac{1}{2}te^{-t}\right) = \frac{1}{2}t^2 e^{-t},$$

takže $f(t) = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t} + te^{-t}/2 = -2 + t + e^{-t}(2 + t + t^2/2)$ čo súhlasí s predošlým výsledkom.

c) „Klasický“ spôsob rozkladu na čiastočné zlomky:

$$F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^2(p+1)^3} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{B_1}{p+1} + \frac{B_2}{(p+1)^2} + \frac{B_3}{(p+1)^3}$$

rovnosť vynásobíme $p^2(p+1)^3$

$$p^2 + p + 1 = A_1p(p+1)^2 + A_2(p+1)^2 + B_1p^2(p+1)^2 + B_2p^2(p+1) + B_3p^2.$$

Umocníme, roznásobíme a porovnáme koeficienty pri jednotlivých mocninách p na oboch stranách

$$\begin{array}{rcll} p^4: & A_1 & + B_1 & = 0 \\ p^3: & 3A_1 & + A_2 & + 2B_1 & + B_2 & = 0 \\ p^2: & 3A_1 & + 3A_2 & + B_1 & + B_2 & + B_3 & = 1 \\ p^1: & A_1 & + 3A_2 & & & = 1 \\ p^0: & A_1 & + A_2 & & & = 1 \end{array}$$

Z posledných dvoch rovníc zistíme, že $A_2 = 1$, $A_1 = -2$. Potom z prvej rovnice $B_1 = 2$, z druhej $B_2 = 1$

a z tretej $B_3 = 1$, takže $F(p) = \frac{-2}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3}$

Ďalší postup je zhodný s postupom v 14b. V tomto príklade je postup c) kratší ako b), ale situácia sa zmení v prípadoch, keď korene budú komplexné. Najrýchlejší je postup a), ktorý využíva vetu o rezíduách.

Príklad 15

Vyriešme príklad 11 s použitím vety o rezíduách. Hľadáme rezíduá funkcie

$$I(p) e^{pt} = \frac{U}{L} \frac{e^{pt}}{(p-p_1)(p-p_2)}.$$

Jej póly sú p_1 a p_2 .

$$\text{res}(p_1) = \lim_{p \rightarrow p_1} [(p-p_1)I(p) e^{pt}] = \frac{U}{L} \frac{e^{p_1 t}}{(p_1-p_2)},$$

$$\text{res}(p_2) = \lim_{p \rightarrow p_2} [(p-p_2)I(p) e^{pt}] = \frac{U}{L} \frac{e^{p_2 t}}{(p_2-p_1)}.$$

Prúd, ktorý tečie obvodom je $i(t) = \frac{U}{L} \frac{e^{p_2 t} - e^{p_1 t}}{(p_2 - p_1)}$, čo zodpovedá výsledku v príklade 11.

Príklad 16

Aké je napätie na kondenzátore v obvode z obr. 12 Použijeme výsledok z príkladu 12:

$$u_C(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{p}C} I(\mathbf{p}) = \frac{U}{LC} \frac{\omega}{\mathbf{p}^2 + \omega^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}R/L + 1/LC} = \frac{U}{LC} \frac{\omega}{\mathbf{p}^2 + \omega^2} \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2)}.$$

Použijeme vlastnosť 1 a 8, lebo originály k funkciám $F_1(\mathbf{p}) = \frac{\omega}{\mathbf{p}^2 + \omega^2}$ a $F_2(\mathbf{p}) = \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2)}$

(príklad 3 a 11) už poznáme: $f_1(t) = \sin \omega t$; $f_2(t) = \frac{U}{L} \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}$. Podľa vety o konvolúcii (veta 8) je

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t \sin \omega \tau \frac{e^{p_1(t-\tau)} - e^{p_2(t-\tau)}}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)} d\tau = \\ &= \left(\frac{\sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega}{\mathbf{p}_1}\right)}{\mathbf{p}_1^2 + \omega^2} - \frac{\sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega}{\mathbf{p}_2}\right)}{\mathbf{p}_2^2 + \omega^2} + \frac{e^{p_1 t}}{\mathbf{p}_1^2 + \omega^2} + \frac{e^{p_2 t}}{\mathbf{p}_2^2 + \omega^2} \right) \frac{1}{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}. \end{aligned}$$

Často treba v praxi je vypočítať napäťový prenos obvodu. V tomto príklade to je

$$K(\mathbf{p}) = \frac{u_C(\mathbf{p})}{u(\mathbf{p})} = \frac{U}{LC} \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2)}.$$

Obraz napätia na kondenzátore je

$$u_C(\mathbf{p}) = \frac{U\omega}{\mathbf{p}^2 + \omega^2} K(\mathbf{p}) = \frac{A_1}{\mathbf{p} - j\omega} + \frac{A_2}{\mathbf{p} + j\omega} + \frac{A_3}{\mathbf{p} - \mathbf{p}_1} + \frac{A_4}{\mathbf{p} - \mathbf{p}_2}.$$

Prvý a druhý člen zodpovedajú ustálenému stavu, tretí a štvrtý prechodovému deju, ktorý s časom exponenciálne zaniká a po päťnásobku časovej konštanty ho môžeme považovať za nulový.

Určíme $A_1 = \lim_{\mathbf{p} \rightarrow j\omega} u_C(\mathbf{p})(\mathbf{p} - j\omega) = \frac{U}{LC} \frac{\omega}{2j\omega} K(j\omega)$. Podobne $A_2 = -\frac{U}{LC} \frac{\omega}{2j\omega} K(-j\omega)$. $K(j\omega)$

a $K(-j\omega)$ sú komplexne združené. $K(j\omega)$ sme dostali z $K(\mathbf{p})$ náhradou $\mathbf{p} \rightarrow j\omega$, to znamená prenos harmonického signálu. Môžeme písať $K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, kde $K(\omega)$ nazývame **amplitúdová** a $\varphi(\omega)$ **fázová** kmitočtová charakteristika. Tieto vieme určiť aj pomocou symbolicko-komplexného zobrazenia. Zmenou $\mathbf{p} \Leftrightarrow j\omega$ môžeme „prechádzať“ z jednej operátorovej metódy do druhej.

Skúmame teraz lineárny obvod, ktorý prenáša signál bez tvarového skreslenia. Zachová jeho spektrálne zloženie, zmení mu iba veľkosť a celý ho o nejaký čas τ oneskorí. Odozva na vstupný signál $u_i(t)$ bude $u_o(t) = K \cdot u_i(t - \tau)$. Obraz výstupného napätia je $u_o(\mathbf{p}) = K u_i(\mathbf{p}) e^{-\mathbf{p}\tau}$. Napäťový prenos je $K(\mathbf{p}) = K e^{-\mathbf{p}\tau}$. Pre harmonické napätia ($\mathbf{p} \rightarrow j\omega$) fáza s časom lineárne narastá $\varphi(\omega) = -\omega\tau$. Výsledok dovoľuje kvalitatívne posúdiť skreslenie obvodu z jeho fázovej charakteristiky.

Príklad 17

Obraz periodickej funkcie $f(t)$ je $F(\mathbf{p}) = F_{\Delta}(\mathbf{p})/(1 - e^{-\mathbf{p}T})$ (príklad 8). Ak tomuto obrazu spätne priradíme predmet $f(t)$, platí:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} \frac{F_{\Delta}(\mathbf{p}) e^{\mathbf{p}t}}{1 - e^{-\mathbf{p}T}} d\mathbf{p}.$$

Nájdeme póly funkcie $\frac{F_{\Delta}(\mathbf{p})e^{pT}}{1-e^{-pT}}$. Pre póly je splnená rovnosť $1-e^{-pT}=0$. Tej vyhovujú hodnoty $\mathbf{p}_k T = 2k\pi j$, t. j. $\mathbf{p}_k = jk\Omega$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Podľa vety o rezíduách originál periodickej funkcie je

$$f(t) = \sum \text{res} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{p \rightarrow \mathbf{p}_k} \left[\frac{F_{\Delta}(\mathbf{p})e^{pT}}{1-e^{-pT}} (\mathbf{p} - jk\Omega) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{p \rightarrow jk\Omega} \frac{F_{\Delta}(\mathbf{p})e^{pT}}{t e^{-pT}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F_{\Delta}(jk\Omega) e^{jk\Omega t}.$$

Na výpočet limity sme použili l'Hospitalovo pravidlo. Výsledok je vlastne Fourierov rad v komplexnom tvare (ods. 2.2.2), kde koeficienty radu sú

$$c_k = \frac{a_k - j b_k}{2} = \frac{1}{T} F_{\Delta}(jk\Omega),$$

takže pre koeficienty a_k a b_k platí

$$a_k = \frac{2}{T} \text{Re}\{F_{\Delta}(jk\Omega)\}, \quad b_k = -\frac{2}{T} \text{Im}\{F_{\Delta}(jk\Omega)\}, \quad a_0 = \frac{2}{T} F_{\Delta}(0).$$

Vypočítame rozvoj obdĺžnikového priebehu z obr. 18a do Fourierovho radu. Obrazom impulzu dĺžky jedného kmitu $f_{\Delta}(t) = U - 2U \cdot 1(t - T/2) + U \cdot 1(t - T)$ je $F_{\Delta}(\mathbf{p}) = U(1 - e^{-pT/2})^2/\mathbf{p}$. Určíme koeficienty členov Fourierovho radu:

$$\frac{2}{T} F_{\Delta}(jk\omega) = \frac{2U}{Tjk\omega} (1 - e^{jk\omega T/2})^2 = \frac{U}{jk\pi} (1 - \cos k\pi + j \sin k\pi)^2 = \frac{U}{jk\pi} (1 - \cos k\pi)^2 = \frac{U}{jk\pi} [1 - (-1)^k]^2;$$

pre párne $k = 2l$ je $\frac{2}{T} F(jk\omega) = 0,$

pre nepárne $k = 2l + 1$ je $\frac{2}{T} F(jk\omega) = \frac{4U}{j(2l+1)\pi}.$

Rozvoj má iba sínusové členy $b_{2l+1} = \frac{4U}{\pi} \frac{1}{2l+1}$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Vzťah pre rozvoj obdĺžnikového napätia s amplitúdou U v závislosti od času je

$$f(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\omega t}{2k+1}$$

Príklad 18

Budeme pokračovať v príklade 13 a určíme napätie na kondenzátore v obvode z obr. 19a.

Máme určiť originál k obrazu $F(\mathbf{p}) = \frac{U}{RC} \frac{e^{pT}}{\mathbf{p}(\mathbf{p} + 1/RC)(1 + e^{-pT/2})}$. Rutinné použitie vety o rezí-

duách vedie k výsledku:

$$u_C(t) = \frac{U}{2} - U \frac{e^{-t/RC}}{1 + e^{-pT/2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U e^{p_k t}}{\pi j(1+2k)(1 + p_k RC)},$$

v ktorom súčet radu kladie neprímerané nároky čas výpočtu.

Lepšie je vychádzať z obrazov periodických funkcií. Výraz $1/(1 + e^{-pT/2})$ znamená antiperiodickú funkciu vytvorenú posúvaním o $T/2$ impulzu konečnej dĺžky a súčasným striedaním jeho polaritu:

$$f(t) = f_{\Delta}(t) - f_{\Delta}(t - T/2) \cdot 1(t - T/2) + f_{\Delta}(t - T) \cdot 1(t - T) - f_{\Delta}(t - 3T/2) \cdot 1(t - 3T/2) + \dots$$

Obraz impulzu konečnej dĺžky je $F(\mathbf{p}) = \frac{U}{RC} \frac{1}{\mathbf{p}(\mathbf{p} + 1/RC)}$, čomu zodpovedá originál $u_{\Delta}(t) = U(1 - e^{-t/RC})$.

Po n opakovaníach bude napätie na kondenzátore

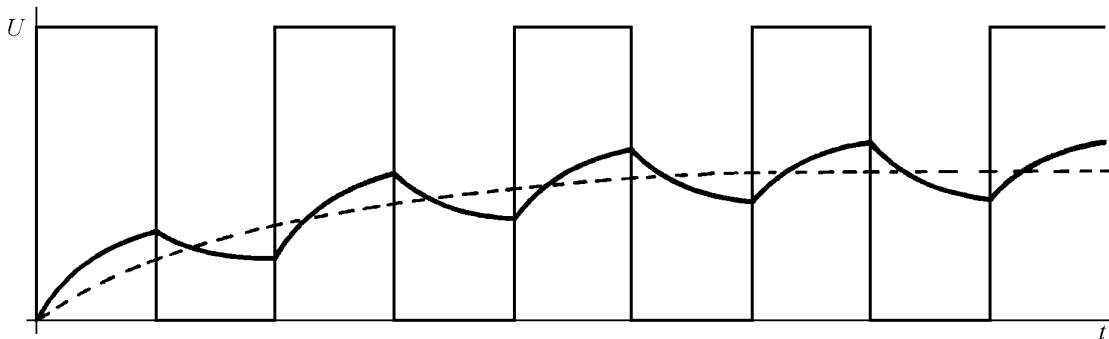
$$u_C(t) = U \sum_{k=0}^n (-1)^k [1 - e^{-(t-kT/2)/RC}] = U \frac{1+(-1)^n}{2} - U e^{-t/RC} \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{kT/2RC} =$$

$$= U \frac{1+(-1)^n}{2} - U e^{-t/RC} \frac{(-1)^{n+1} e^{-(n+1)T/2RC} - 1}{1 + e^{T/RC}}.$$

Čas t môžeme vyjadriť aj inak: $t = \tau + nT/2$, kde $\tau \in \langle 0, T/2 \rangle$. Napätie $u_C(t)$ bude mať tvar

$$u_C(t) = U \frac{1+(-1)^n}{2} - U e^{-\tau/RC} \frac{(-1)^{n+1} - e^{-(n+1)T/2RC}}{1 + e^{T/RC}}.$$

V rozsahu jednej polperiódy ide o exponenciálne priebehy s časovou konštantou RC . Do ustáleného stavu $[(n+1)T/2RC > 5]$ sa obvod dostane zhruba po čase $t = nT > 10RC$ (obr. 19b).



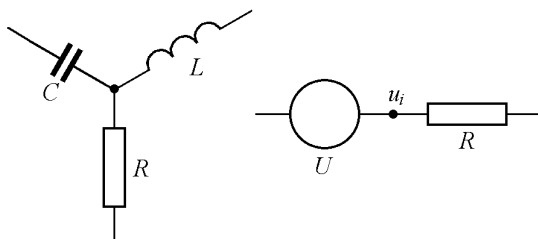
Obr. 19b

2.3 Kirchhoffove pravidlá a Ohmov zákon

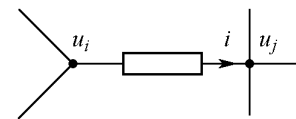
Úvahy o riešení obvodov sme robili s mlčanlivým predpokladom, že ide o obvody so sústredenými parametrami. Tohto obmedzenia sa budeme držať aj naďalej a zdôrazníme ešte, že ide o kvázistacionárne potenciálové polia. Skôr ako si uvedieme niektoré zákonitosti, musíme zaviesť niekoľko nových pojmov.

2.3.1 Základné topologické pojmy

Elektrický obvod je fyzicky realizovaný alebo realizovateľný útvar. Fyzikálny model takéhoto obvodu je opísaný sústavou rovníc – matematickým modelom. Schéma elektrického obvodu je topologickým obrazom týchto modelov. Skladá sa zo súboru navzájom pospájaných schematických značiek ideálnych prvkov. Miesto styku dvoch alebo viacerých prvkov nazveme uzol obvodu. V schéme uzol znázorňujeme malým krúžkom (obr. 20) a priraďujeme mu potenciál. Časť obvodu medzi dvoma uzlami nazveme vetva obvodu a v schéme zobrazuje prúd (obr. 21).



Obr. 20



Obr. 21

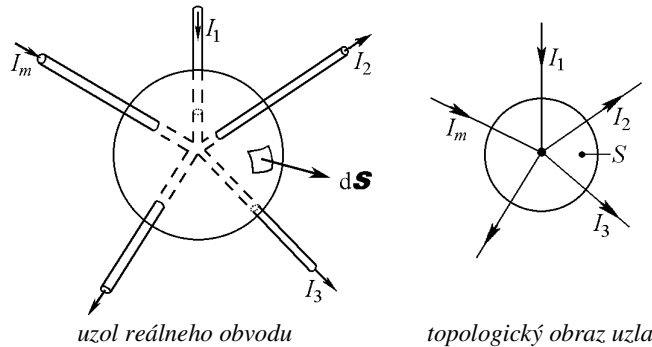
Smer prúdu vo vetve označujeme šípkou. Jeden uzol vetvy môžeme zvoliť za počiatočný, druhý je koncový. Tým sa vetva stala orientovanou, pričom jej orientácia nemusí súhlasiť so smerom prúdu (v nej. Ak v danom časovom okamihu súhlasí orientácia vetvy so smerom jej prúdu, hovoríme o kladnej okamžitej hodnote vetvového prúdu, v opačnom prípade o zápornej hodnote. Skrátene budeme hovoriť o kladnom a zápornom prúde.

Rozdiel okamžitých hodnôt potenciálov uzlov vetvy nazveme okamžitým vetvovým napätím – skrátene napätím vetvy. Pravidlá o orientácii napätia a vetvy sú rovnaké ako v prípade prúdov vetvy.

Stav elektrického obvodu je úplne určený, ak v každom časovom okamihu poznáme okamžité hodnoty potenciálov všetkých uzlov a okamžité hodnoty všetkých vetvových prúdov.

2.3.2 Kirchhoffovo pravidlo pre prúdy (1. Kirchhoffov zákon)

Ľubovoľný z uzlov obvodu obklopíme myslenu uzavretou orientovanou plochou S (obr. 22). Čez časť plochy $d\mathbf{S}$ vyteká zvnútra von prúd $d\mathbf{I} = \mathbf{i}(t) \cdot d\mathbf{S}$. $\mathbf{i}(t)$ je vektor prúdovej hustoty, ktorý je nulový všade mimo prierez vodičov. Celkový vytekajúci prúd z uzla je $\oint_S \mathbf{i}(t) \cdot d\mathbf{S} = \sum_{k=1}^m I_k(t)$.



Obr. 22

Podľa Gauss-Ostrogradského vety je $\oint_S \mathbf{i}(t) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{i}(t) d\tau$, kde V je objem obklopený plochou S .

Pre kvázistacionárne polia je $\text{div } \mathbf{i}(t) = 0$, preto je

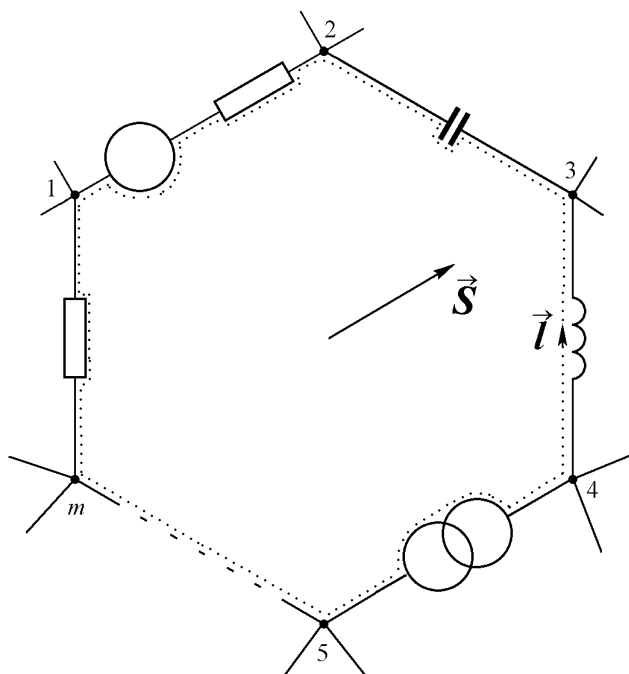
$$\sum_{k=1}^m I_k(t) = 0.$$

To je matematický zápis *Kirchhoffovho pravidla pre prúdy*: Súčet všetkých okamžitých hodnôt vetvových prúdov uzla je rovný nule. Obyčajne sa prúdy, ktoré do uzla vstupujú, považujú za kladné, vytekajúce za záporné.

2.3.3 Kirchhoffovo pravidlo pre napätia (2. Kirchhoffov zákon)

Zoberme ľubovoľných m uzlov obvodu, ktoré sú spojené vetvami do uzavretej slučky. Čez tieto uzly preložíme myslenu uzavretú orientovanú dráhu (čiaru) l , ktorá prechádza tesne po povrchu vodičov a prvkov, ale mimo ich objem (obr. 23). Počítajme pozdĺž tejto čiary integrál $\oint \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{l}$. Dráhu môžeme rozdeliť na úseky, tvorené jednotlivými vetvami. Z vlastností vodičov a prvkov vyplýva, že $\oint \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{l}$ pozdĺž jednej vetvy je rovný okamžitej hodnote vetvového napätia $U_k(t)$. Podľa Stokesovej vety je $\oint \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{S}$, kde S je plocha obkľúčená dráhou l . Pre kvázistacionárne potenciálové polia je však $\text{rot } \mathbf{E}(t) = 0$, takže

$$\sum_{k=1}^m U_k(t) = 0.$$



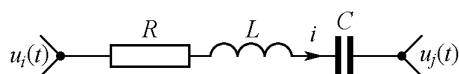
Obr. 23

Kirchhoffovo pravidlo pre napätia teda môžeme vysloviť takto: Súčet všetkých okamžitých hodnôt vetvových napätí uzavretej slučky obvodu je rovný nule.

2.3.4 Zovšeobecnený Ohmov zákon

Vyberieme z obvodu náhodne jednu vetvu (obr. 24). Napätie vetvy

$$u(t) = u_i(t) - u_j(t) = u_R + u_C + u_L = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt .$$



Obr. 24

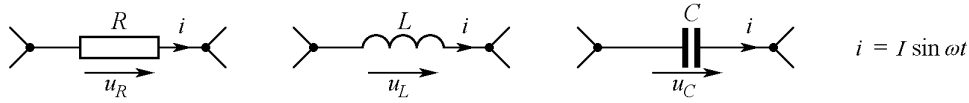
Podiel $u(t)/i(t) = Z$ nazývame **impedancia** (zdanlivý odpor) vetvy, $i(t)/u(t) = 1/Z = Y$ nazývame **admitancia** (zdanlivá vodivosť) vetvy.

Pojem odporu z Ohmovho zákona sme rozšírili na prvky, ktoré striedavým prúdom kladú konečný odpor.

Na základe vlastností symbolicko-komplexného zobrazenia a Laplaceovej transformácie, môžeme ľahko všetky vyššie uvedené zákony napísať v operátorovom vyjadrení.

Poučka	symbolicko komplexné zobrazenie	Laplaceova transformácia
Kirchhoffovo pravidlo pre prúdy	$\sum I_k = 0$	$\sum I(\mathbf{p}) = 0$
Kirchhoffovo pravidlo pre napätia	$\sum U_k = 0$	$\sum U(\mathbf{p}) = 0$
Zovšeobecnený Ohmov zákon	$Z_k = U_k/I_k$ $Y_k = I_k/U_k$	$Z(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p})/I(\mathbf{p})$ $Y(\mathbf{p}) = I(\mathbf{p})/U(\mathbf{p})$

Preskúmame vzťahy medzi prúdmi a napätiami a ich symbolicko-komplexnými a Laplaceovými obrazmi pre ideálne prvky z obr. 25. Začiatkové podmienky $i(0+) = 0$, $u(0+) = 0$. Napätia a prúdy nech sú pre jednoduchosť harmonické veličiny.



Obr. 25

Odpor

$$u_R(t) = R i(t) = R I \sin \omega t = U \sin \omega t$$

$$U = R I$$

$$\varphi = 0$$

obrazy sú

$$i = I$$

$$i(p) = I \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$u_R = R I$$

$$u(p) = R i(p)$$

$$Z = u_R / i = R$$

$$Z(p) = R$$

Cievka

$$u_L(t) = L di(t)/dt = \omega L I \cos \omega t = U \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$U = \omega L I$$

$$\varphi = \pi/2$$

obrazy sú

$$i = I$$

$$i(p) = I \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$u_L = j \omega L i$$

$$u_L(p) = p L i(p) - L i(0+)$$

$$Z = j \omega L$$

$$Z(p) = p L$$

Kondenzátor

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = -\frac{I}{\omega C} \cos \omega t + u_C(0+) = U \sin(\omega t - \pi/2)$$

$$U = -I / \omega C$$

$$\varphi = -\pi/2$$

obrazy sú

$$i = I$$

$$i(p) = I \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$u = i / j \omega C$$

$$u_C(p) = i(p) / p C + u_C(0+)$$

$$Z = 1 / j \omega C$$

$$Z(p) = 1 / p C$$

S obrazmi impedancií a admitancií pracujeme formálne rovnako ako by to boli odpory a rovnako platia aj pravidlá o sériovom a paralelnom spájaní impedancií.

Príklad 19

Určíme obrazy impedancií obvodov z obr. 26.

a)

$$u = iR + \frac{1}{C} \int i dt$$

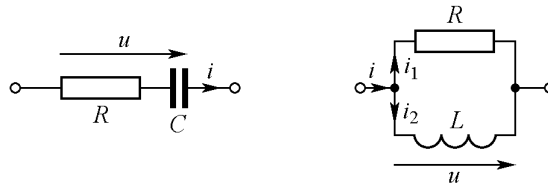
$$u = iR + i / j \omega C$$

$$u(p) = R i(p) + i(p) / p C$$

$$Z = u / i = R + 1 / j \omega C$$

$$Z(p) = R + 1 / p C$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad u &= i_1 R = L di_2/dt & i &= i_1 + i_2 \\
 i_1 &= u/R & i_2 &= \frac{u}{L di_2/dt} \\
 i &= i_1 + i_2 = u/R + u/j\omega L & i(p) &= u(p)R + u(p)/pL \\
 Y &= i/u = 1/R + 1/j\omega L & Y(p) &= 1/R + 1/pL \\
 Z &= 1/Y = j\omega LR/(R + j\omega L) & Z(p) &= pLR/(pL + R)
 \end{aligned}$$



Obr. 26

Väčšinou budeme počítat v symbolicko-komplexnom zobrazení a s ním sa aj v literatúre najčastejšie stretne.

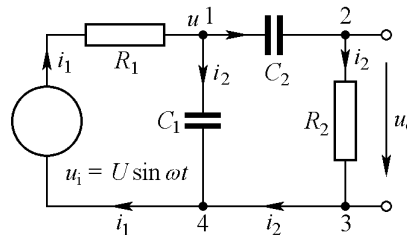
Pre veličiny Z a Y ešte bližšie vysvetlenie. Vo všeobecnosti sú to komplexné čísla ($Z = R + jX$; $Y = G + jB$) a nazývajú sa **komplexná impedancia** resp. **admitancia**. Reálna časť R (G) je *rezistancia* (konduktancia), imaginárna časť X (B) má názov *reaktancia* (susceptancia).

Príklad 20

Aké je napätie u_o v obvode na obr. 27?

Zo zadania problému je zrejmé, že nás zaujíma ustálený stav. Pretože zatiaľ poznáme iba Ohmov zákon a Kirchhoffove pravidlá, vyjdeme z nich. Jedna z možných sústav piatich nezávislých rovníc pre päť neznámych i_1, i_2, i_3, u, u_o je:

$$\begin{aligned}
 u_i - u &= i_1 R_1 & u &= (1/C_1) \int i_3 dt & u - u_o &= (1/C_2) \int i_2 dt \\
 u_o &= i_2 R_2 & i_1 &= i_2 + i_3
 \end{aligned}$$



Obr. 27

Prepíšeme tieto rovnice pre obrazy v symbolicko-komplexnom zobrazení, pričom obraz napätia zdroja $u_i = U$.

$$\begin{aligned}
 u_i - u &= i_1 R_1 & u &= i_3/j\omega C_1 & u - u_o &= 1/j\omega C_2 \\
 u_o &= i_2 R_2 & i_1 &= i_2 + i_3
 \end{aligned}$$

Z prvých troch rovníc určíme obrazy prúdov a tie dosadíme do rovnice štvrtej a piatej. Dostaneme dve rovnice:

$$\begin{aligned}
 u_o &= (u - u_o) j\omega C_2 R_2 \\
 (u_i - u) G_1 &= (u - u_o) j\omega C_2 + u j\omega C_1
 \end{aligned}$$

Upravíme ich na tvar

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(1 + j\omega C_2 R_2)/j\omega C_2 R_2$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(1 + j\omega C_2 R_1 + j\omega C_1 R_1) - \mathbf{u}_0 j\omega C_2 R_1$$

Vylúčime \mathbf{u} dosadením prvej rovnice do druhej. Dostaneme rovnosť

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_0 \left[\frac{1 + j\omega R_1 C_1 + j\omega R_1 C_2 (1 + j\omega R_2 C_2) - j\omega R_1 C_2}{j\omega R_2 C_2} \right]$$

z ktorej ľahko určíme

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_i \frac{j\omega R_2 C_2}{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)} = \frac{\mathbf{u}_i}{R + jX} = \frac{\mathbf{u}_i}{R^2 + X^2} (R - jX)$$

Napätie u_0 v ustálenom stave je $u_0 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{X}{R}\right)$; R a X určíme z predošlej rovnosti.

Postup je prostý, zrozumiteľný, ale vôbec nie krátky, hoci obvod je pomerne jednoduchý.

Na zostavovanie rovníc sme využili vlastne iba Ohmov a Kirchhoffovo pravidlo pre prúdy. Ak použijeme obe Kirchhoffove pravidlá, počet rovníc sa zväčší.

Pre uzly Kirchhoffovo pravidlo pre prúdy:

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad i_2 = i_2; \quad i_2 = i_2; \quad i_2 + i_3 = i_1;$$

Pre uzavreté slučky obvodu (sú tri) Kirchhoffovo pravidlo pre napätia:

$$-u_i + i_1 R_1 + (1/C_1) \int i_3 dt = 0$$

$$-u_i + i_1 R_1 + (1/C_2) \int i_2 dt + i_2 R_2 = 0$$

$$(1/C_2) \int i_2 dt + i_2 R_2 - (1/C_1) \int i_3 dt = 0$$

Ohmov zákon

$$u = (1/C_1) \int i_3 dt$$

$$u_0 = i_2 R_2$$

Dostali sme deväť rovníc pre päť neznámych. Na prvý pohľad je zrejmé, že zo štyroch rovníc pre Kirchhoffove pravidlá pre prúdy sú okrem prvej všetky závislé. Závislá je aj tretia rovnica pre Kirchhoffove pravidlá pre napätia, pretože ju dostaneme odčítaním prvej od druhej. Vylúčením závislých rovníc dostávame opäť sústavu piatich rovníc s piatimi neznámymi a jej riešenie je zhodné s predchádzajúcim príkladom. (Presvedčte sa).

3 VŠEOBECNÉ METÓDY ANALÝZY OBVODOV V USTÁLENOM HARMONICKOM STAVE

Čím je obvod zložitejší, tým väčší počet rovníc preň môžeme zostaviť. Problém spočíva vo výbere optimálnej sústavy nezávislých rovníc.

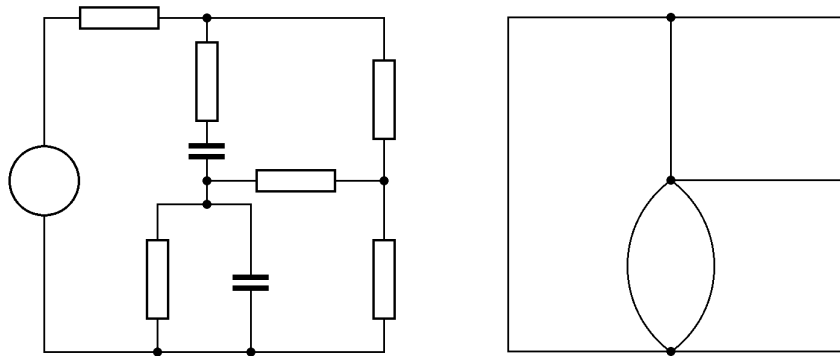
Majme obvod, v ktorom je n uzlov a m vetiev a známe sú parametre všetkých prvkov. Počet neznámych je: m prúdov pre vetvy a n potenciálov pre uzly. Na určenie vetvového prúdu je potrebné poznať vetvové napätia, teda rozdiel potenciálov uzlov. Základný potenciál (nulový) môžeme voliť ľubovoľne. Pretože pri riešení obvodov obyčajne nezáleží na absolútnych hodnotách elektrických potenciálov, môžeme potenciál jedného uzla (vhodne vybraného) považovať za nulový, a potom pracujeme s napätiami $n - 1$ nezávislých uzlov.

K výsledku, že z n uzlov obvodu je nezávislých iba $n - 1$ sa môžeme dostať aj inak. Pre n uzlov sa dá napísať podľa Kirchhoffovho pravidla pre prúdy n homogénnych rovníc. Sčítajme tieto rovnice. Pretože každý prúd z nejakého uzla vyteká a do nejakého uzla vteká, bude sa na ľavej strane súčtu rovníc vyskytovať s kladným aj záporným znamienkom. Takže výsledok súčtu n rovníc pre uzly bude $0 = 0$. To ale znamená, že rovnice sú lineárne závislé a možno z nich získať najviac $n - 1$ nezávislých rovníc.

Na úplné určenie stavu obvodu s n uzlami a m vetvami potrebujeme m rovníc pre vetvové prúdy a $n - 1$ rovníc pre napätia uzlov. Použitím zovšeobecneného Ohmovho zákona vieme z vetvového prúdu a impedancie vetvy určiť vetvové napätie. Pomocou Kirchhoffovho pravidla pre prúdy môžeme zostaviť $n - 1$ rovníc, takže potrebujeme ešte zostaviť na základe Kirchhoffovho pravidla pre napätia $m - n + 1$ rovníc. Musíme vedieť nájsť v obvode $m - n + 1$ nezávislých slučiek. Obyčajne ich nájdeme viac, preto bude počet nezávislých rovníc, opisujúcich obvod, vždy menší, ako počet rovníc, ktoré môžeme zostaviť s použitím Ohmovho a Kirchhoffových pravidiel. Takže netreba tieto zákony aplikovať na všetky uzly, vetvy a slučky, ale iba na niektoré. Z praktického hľadiska je výhodné určiť si ich vopred.

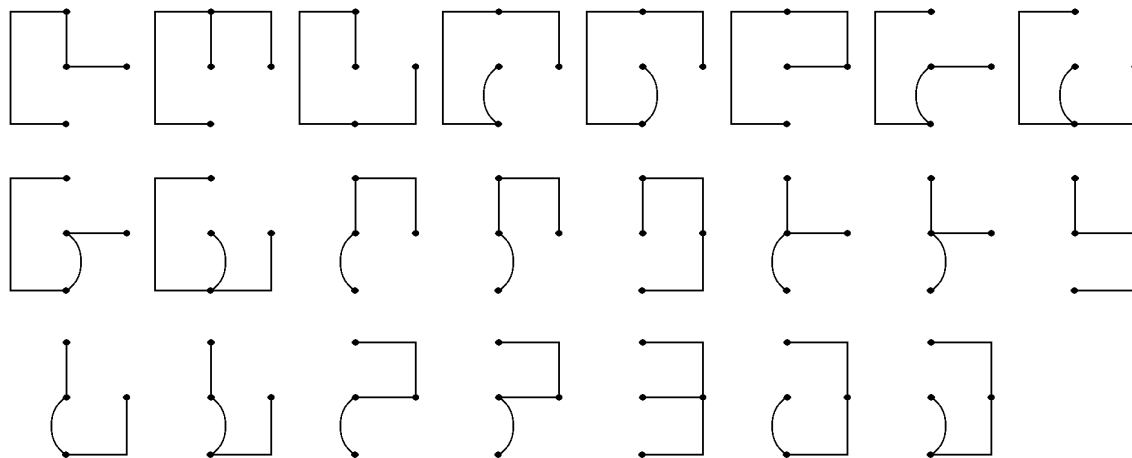
K ďalšiemu všeobecnému rozboru obvodu si zavedieme pojem grafu obvodu. Dostaneme ho tak, že v schéme nahradíme vetvy s nenulovou impedanciou čiarami (obr. 28b), ktoré vlastne zobrazujú vetvové prúdy. Graf obvodu nám sprehľadňuje jeho topológiu z hľadiska rozloženia prúdov a napätí.

Z obr. 28 napr. zistíme, že v obvode je celkove 12 uzavretých slučiek. Pretože obvod má 4 uzly a 7 vetiev, budú iba 4 slučky ($= 7 - 4 + 1$) nezávislé. Tie sú síce v grafe zreteľné na prvý pohľad, avšak z hľadiska riešenia obvodu môže byť optimálny súbor iných štyroch slučiek. Pre nás je ale dôležitý fakt, že všetkých n uzlov v obvode môžeme spojiť $n - 1$ vetvami tak, aby netvorili žiadnu slučku. Tomuto súboru vetiev hovoríme úplný strom (úplný preto, že sa vzťahuje na celý (úplný) vyšetrovaný obvod). Pridaním hocijakej ďalšej vetvy k stromu vznikne slučka. Súbor vetiev, ktoré nepatria do úplného stromu nazývame systém nezávislých vetiev a je ich práve $m - n + 1$.



Obr. 28

Úplných stromov môže byť viacero. Napríklad obvod, a teda aj jeho graf z obr. 28, ich môže mať celkovo 23 (obr. 29).



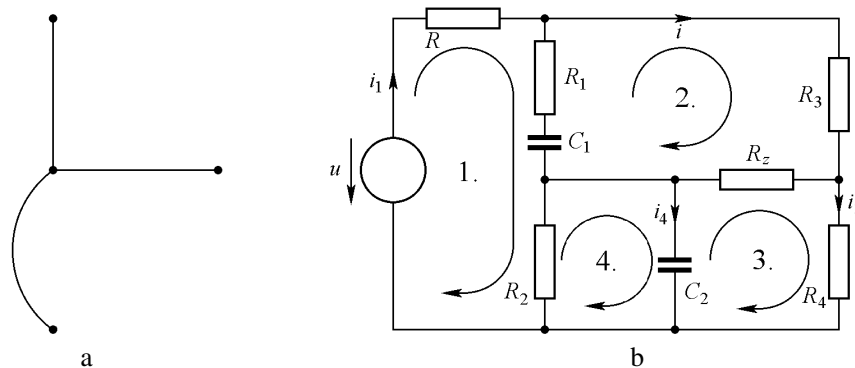
Obr. 29

Použitie Kirchhoffových pravidiel nám teda umožňuje zostaviť m nezávislých rovníc pre m vetvových prúdov. Pomocou Ohmovho zákona zistíme aj vetvové napätia, takže stav obvodu máme plne opísaný. Ukážeme si ďalej, že na úplné určenie obvodu je zbytočné riešiť m rovníc, tento počet budeme môcť znížiť.

3.1 Metóda slučkových prúdov

V obvode s n uzlami a m vetvami je $m - n + 1$ nezávislých vetiev a práve toľko nezávislých slučiek. Pre každú slučku môžeme zaviesť **slučkový prúd**. To je prúd nezávislej vetvy slučky, o ktorom predpokladáme, že tečie celou slučkou. Slučka je tvorená jednou nezávislou vetvou a niektorými vetvami úplného stromu, ktoré sú závislé. Tieto závislé vetvy sú spoločné viacerým slučkám, preto podľa princípu superpozície je prúd v závislej vetve rovný súčtu slučkových prúdov všetkých slučiek, ktorým je závislá vetva spoločná. Skutočne nám teda stačí poznať $m - n + 1$ prúdov nezávislých vetiev, aby sme vedeli určiť úplný stav obvodu.

Príklad 21. Aký prúd tečie cez odpor R_z v obvode z obr. 30?



Obr. 30

V tomto obvode je 7 vetiev a 4 uzly, preto počet nezávislých vetiev bude $7 - 4 + 1 = 4$. Úplný strom obvodu vyberieme podľa obr. 30a, nezávislé vetvy tvoria s týmto stromom 4 slučky (obr. 30b).

Slučky a ich orientácia – smery slučkových prúdov – sú označené orientovanými čiarami. Z praktického hľadiska, ako uvidíme ďalej, je výhodné voliť orientáciu všetkých slučiek rovnakú.

Smery prúdov nezávislých vetiev a orientácie slučiek, a teda aj slučkových prúdov, sú súhlasné. Prúd cez odpor R_z bude $i_2 - i_3$ (alebo $i_3 - i_2$).

Použitím Kirchhoffovho pravidla pre napätia môžeme pre slučky napísať štyri rovnice. Aby sme sa vyhli integrálno-diferenciálnym rovniciam, píšeme už priamo rovnice pre obrazy v symbolicko-komplexnom zobrazení.

$$\begin{aligned} 1. \text{ slučka} & \quad i_1(R + R_1 + 1/j\omega C_1 + R_2) - i_2(R_1 + 1/j\omega C_1) - i_4 R_2 = u \\ 2. \text{ slučka} & \quad -i_1(R_1 + 1/j\omega C_1) + i_2(R_1 + 1/j\omega C_1 + R_2 + R_z) - i_3 R_z = 0 \\ 3. \text{ slučka} & \quad -i_2 R_z + i_3(R_4 + 1/j\omega C_2 + R_z) - i_4/j\omega C_2 = 0 \\ 4. \text{ slučka} & \quad -i_1 R_2 - i_3/j\omega C_2 + i_4(R_2 + 1/j\omega C_2) = 0 \end{aligned}$$

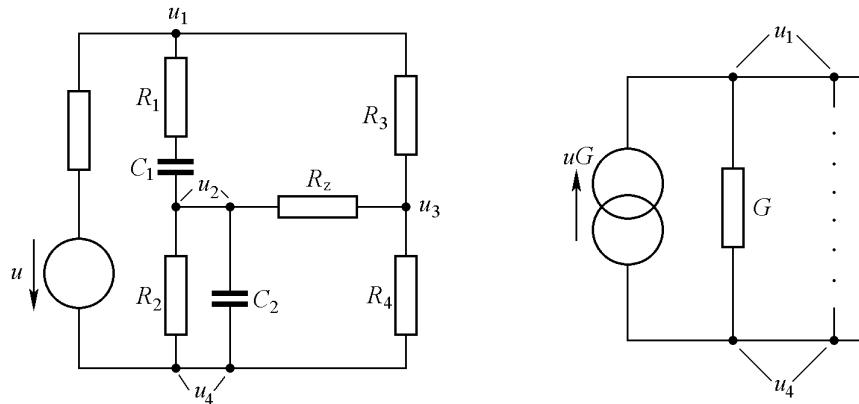
Na vyriešenie tejto sústavy štyroch rovníc môžeme použiť niektorú z metód známych z algebry, napr. Cramerovo pravidlo.

3.2 Metóda uzlových napätí

Všeobecne je potenciál každého uzla obvodu iný. Zvyčajne nás nezaujímajú ich absolútne hodnoty, ale uzlové napätia. Pretože rovnice pre všetky uzly sú lineárne závislé, volíme jeden uzol za základný a jeho potenciál zvolíme rovný nule. Potenciály ostatných uzlov počítame voči tomuto referenčnému uzlu, takže ďalej už pracujeme s napätiami uzlov. Ak by nás predsa len zaujímali absolútne hodnoty potenciálov (voči potenciálu v nekonečne), tak ku všetkým uzlovým napätiam pripočítame absolútny potenciál referenčného uzla.

V metóde uzlových napätí teda pracujeme s $n - 1$ napätiami uzlov, z ktorých vieme určiť všetky vetvové napätia a teda aj vetvové prúdy. Na každý uzol okrem vzťažného použijeme Kirchhoffovo pravidlo pre prúdy.

Príklad 22. Riešme predošlý príklad metódou uzlových napätí (obr. 31).



Obr. 31

Za referenčný môžeme zvoliť ktorýkoľvek z uzlov. Zo zadania úlohy často vyplynie, voľba ktorého je z hľadiska jednoduchosti riešenia optimálna. Uzly 2 a 4 sú zdvojené, ale skrat medzi nimi spôsobuje, že každá dvojica má ten istý potenciál. Za referenčný uzol zvolíme štvrtý, takže $u_4 = 0$.

Na uzly použijeme Kirchhoffovo pravidlo pre prúdy a píšeme už priamo rovnice pre obrazy (prúdy chápeme ako vytekajúce z uzla):

$$\begin{aligned} 1. \text{ uzol} & \quad (u_1 - u)G + \frac{u_1 - u_2}{R_1 + 1/j\omega C_1} + (u_1 - u_2)G_2 = 0 \\ 2. \text{ uzol} & \quad \frac{u_2 - u_1}{R_1 + 1/j\omega C_1} + (u_2 - u_3)G_z + (u_2 - 0)(G_2 + j\omega C_2) = 0 \\ 3. \text{ uzol} & \quad (u_3 - u_1)G_3 + (u_3 - u_2)G_z + (u_3 - 0)G_4 = 0 \end{aligned}$$

V tejto metóde býva prospešné zaviesť namiesto napäťových modelov zdrojov ich prúdové modely (obr. 31b). Vtedy prúdy prúdových zdrojov vystupujú na pravých stranách rovníc. V našom príklade sa zmení rovnica pre 1. uzol

$$u_1 G + \frac{u_1 + u_2}{R_1 + 1/j\omega C} + (u_1 - u_3)G = uG$$

Uzol tvorený stykom odporu R a kondenzátora C sme v príklade vypustili, čím sme sa zbavili jednej premennej a tým aj jednej rovnice. Podobne sme sa mohli zbaviť v metóde slučkových prúdov slučky tvorenej odporom R a kondenzátorom C a zaviesť impedanciu ich paralelného spojenia.

Zostavenú sústavu troch rovníc opäť riešime niektorou zo známych metód.

3.3 Metódy na čiastočné riešenie obvodov

V praxi sa obyčajne nezaujíname o všetky uzlové napätia a vetvové prúdy, ale len o niektoré. Na takéto čiastočné riešenie boli vypracované viaceré postupy, ktoré sa nazývajú vety alebo princípy. Menujeme tie, ktoré sa v literatúre vyskytujú najčastejšie:

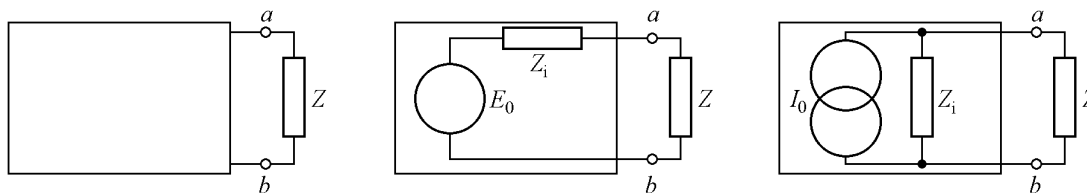
princíp superpozície	veta Tellegenova
reciprocity	Cohnova
kompenzácie	Bartletova
náhradného zdroja	dvojpólová
duality	štvorpólová

Všetky tieto poučky majú tvar všeobecne platných pravidiel a ich vhodné použitie predstavuje v riešení obvodu skratku, ktorou sa rýchlo dostaneme k čiastkovému riešeniu. Viacnásobným použitím i viacerých poučiek môžeme potom úplne riešiť obvod v prijateľne krátkom čase.

Pri riešení obvodov Kirchhoffovými rovnicami, metódami uzlových napätí a slučkových prúdov sa problém obyčajne redukuje na riešenie sústavy lineárnych algebraických rovníc pre obrazy prúdov a napätí. Na ich riešenie boli vypracované rôzne maticové metódy, metódy grafov a pod. Maticová metóda viedla k vytvoreniu teórie dvojbrán (štvorpólov). Každá z týchto metód je dnes rozpracovaná do rozsiahlej teórie a má svoje opodstatnenie a optimálne vlastnosti pre istý okruh problémov. Autori týchto učebných textov sú toho názoru, že je lepšie zvládnuť jednu metódu dôkladne tak, aby umožnila dopracovať sa v rozumnom čase k použiteľnému výsledku, než poznať široké spektrum metód len povrchné.

Z vymenovaných viet a princípov sme už niekoľko raz použili princíp superpozície. Ďalší, v praxi veľmi užitočný je **princíp náhradného zdroja**, ktorý pochádza od H. Helmholtza a neskôr bol znovu objavený L. Théveninom, s menom ktorého sa najčastejšie spája. O čo ide?

Veľmi často sa zaujíname iba o prúd v jednej vetve obvodu. Túto vetvu môžeme považovať za záťaž (spotrebič) a zvyšok obvodu považujeme za zdroj. Celý, hocijako komplikovaný obvod, nahradíme jednoduchým modelom, ktorým je napäťový alebo prúdový zdroj so záťažou (obr. 32)



Obr. 32

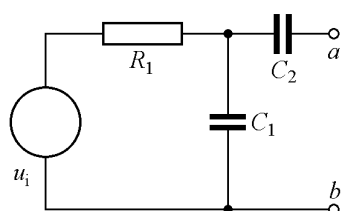
Théveninova veta tvrdí, že E_0 je rovné napätiu na uzloch a, b obvodu naprázdno, t. j. pri odpojenej vetve Z . Impedancia Z_i je rovná impedancii obvodu medzi uzlami a, b , pričom ideálne zdroje napätia v obvode sú nahradené skratkami a ideálne zdroje prúdu sú odpojené (v oboch prípadoch zostávajú vnútorné odpory reálnych zdrojov bezo zmeny v obvode).

Pretože vieme nahradiť napäťový model zdroja prúdovým, možno vysloviť podobnú vetu pre prúdový zdroj. Táto veta sa v literatúre uvádza ako **Nortonova veta** a tvrdí, že I je rovný prúdu cez vetvu Z nahradenú skratom. Pre impedanciu Z tvrdí to isté čo Théveninova veta.

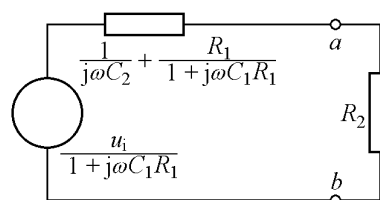
Pre nás je významný dôsledok týchto viet, a to fakt, že pomer napätia naprázdno na nejakej dvojici uzlov obvodu a skratového prúdu tejto dvojice je rovný impedancii obvodu z hľadiska vybranej dvojice uzlov.

Príklad 23. Riešme obvod z obr. 27 pomocou Théveninovej vety. Z obvodu vyberieme odpor R_2 (obr. 33). Napätie naprázdno je

$$E_0 = \frac{u_i}{R_1 + 1/j\omega C_1} \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{u_i}{1 + j\omega R_1 C_1}$$



Obr. 33



Obr. 34

Zdroj u_i nahradíme skratom a impedancia medzi uzlami a, b je

$$Z_i = \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{R_1/j\omega C_1}{R_1 + 1/j\omega C_1} = \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

Obvod z obr. 27 nahradíme modelom s Théveninovým náhradným zdrojom (obr. 34).

V úvahe a na obr. 34 sme sa dopustili niekoľkých „chýb“. O obrazoch napätia a impedancií sme hovorili ako o napätí a impedanciách a podobne na obr. 34 sme použili schematické značky ideálneho zdroja napätia a impedancie pre ich obrazy. Je to síce nesprávne, ale kde nemôže prísť k omylu je tento skratkový postup v praxi bežný. Netreba vymýšľať ďalšiu sadu značiek pre obrazy parametrov súčiastok a ušetríme si mnohonásobné opakovanie slova obraz.

Napätie na odpore R_2 už určíme ľahko:

$$\begin{aligned} u_o &= \frac{E_0 R_2}{Z_i + R_2} = \frac{u_i}{1 + 1/j\omega R_1 C_1} \frac{R_2}{1/j\omega C_2 + R_1/(1 + 1/j\omega R_1 C_1) + R_2} = \\ &= \frac{R_2 j\omega C_2}{1 + j\omega R_1 C_1 + j\omega R_1 C_2 + j\omega R_2 C_2 (1 + j\omega R_1 C_1)} u_i = \frac{j\omega R_2 C_2}{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + j\omega (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)} u_i \end{aligned}$$

čo je výraz zhodný s výsledkom z príkladu 20.

K tomu ešte dôsledok: Z výsledného vzťahu pre napätie (alebo prúd) niektorej vetvy obvodu, ku ktorému sa môžeme dostať nejakým iným spôsobom, sa dajú ľahko určiť parametre náhradného zdroja. Napr. z výsledkov príkladu 20 vyrátame:

$$E_0 = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} u_o = u_i \frac{j\omega C_2}{-\omega^2 R_1 C_1 C_2 + j\omega C_2} = \frac{u_i}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

$$I_0 = \lim_{R_2 \rightarrow 0} \frac{u_o}{R_2} = \frac{u_i j\omega C_2}{1 + j\omega (R_1 C_1 + R_1 C_2)}$$

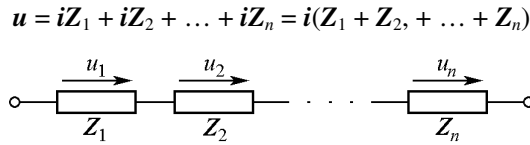
$$Z_i = \frac{E_0}{I_0} = \frac{1 + j\omega (R_1 C_1 + R_1 C_2)}{j\omega C_2 (1 + j\omega R_1 C_1)} = \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

čo sa zhoduje s riešením v príklade 23.

Niektoré skratkové postupy je vhodné si pamätať, pretože sa tým urýchli riešenie obvodu, alebo pri čiastočných analýzach umožnia obísť zdĺhavé počítanie. Niektoré výsledky sme už použili.

Sériové radenie impedancií

Z_1, Z_2, \dots, Z_n (obr. 35) môžeme nahradiť jedinou impedanciou. Všetkými impedanciami preteká ten istý prúd, výsledné napätie na sériovom spojení impedancií je rovné súčtu napätí na jednotlivých impedanciách.



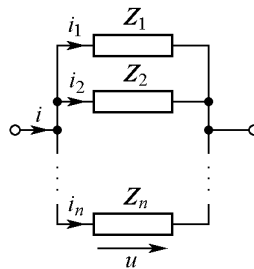
Obr. 35

a náhradná impedancia je: $Z = u/i = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$

Paralelné radenie impedancií

Z_1, Z_2, \dots, Z_n (obr. 36) tiež môžeme nahradiť jedinou impedanciou. Na všetkých je to isté napätie u a výsledný prúd je rovný súčtu prúdov cez jednotlivé vetvy. Výhodné je použiť namiesto impedancií admitancie, takže $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = uY_1 + uY_2 + \dots + uY_n = u(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)$. Náhradná admitancia za obvod na obr. 36 je $Y = i/u = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$. Pre najbežnejší prípad dvoch impedancií je $Y = Y_1 + Y_2$ alebo pre impedancie $1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2$ a z toho po malej úprave

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



Obr. 36

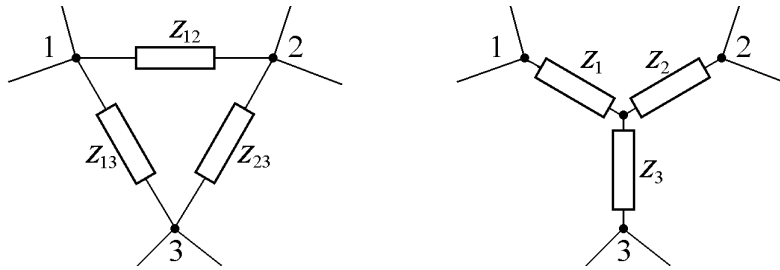
Transfigurácia obvodu

Niekedy môže riešenie obvodu urýchliť zámena zapojenia „trojuholník“ (π -článok) za „hviezdu“ (T-článok) alebo naopak (obr. 37). Premena je pomerne jednoduchá a vychádza z podmienky, že za každých okolností musia byť impedancie medzi uzlami oboch izolovaných trojuzlových schém rovnaké. Impedancie medzi jednotlivými dvojicami uzlov sú (použijeme výsledky odvodené pre spájanie impedancií):

$$1 - 2: \quad \frac{Z_{12}(Z_{13} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} = Z_1 + Z_2$$

$$1 - 3: \quad \frac{Z_{13}(Z_{12} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} = Z_1 + Z_3$$

$$2 - 3: \frac{Z_{23}(Z_{12} + Z_{13})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} = Z_2 + Z_3$$



Obr. 37

Sčítame prvú a druhú rovnicu, odpočítame tretiu, výsledok je:

$$2Z_1 = 2 \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

Postup cyklicky opakujeme, dostaneme vzťahy na premenu trojuholníka na hviezdu:

$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

Skratujeme uzly 2 a 3, výsledná admitancia medzi uzlami 1 a 2 (spojený s 3) je

$$Y_{12} + Y_{13} = \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

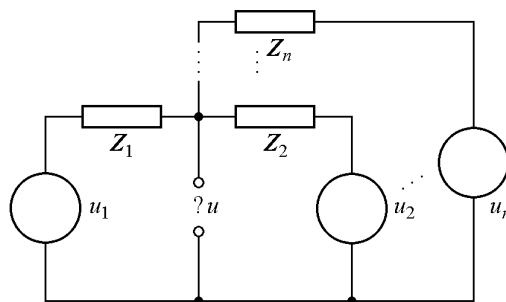
Postup cyklicky opakujeme, dostaneme sústavu troch rovníc, ktoré riešime podobne ako predtým. Dostaneme vzťahy pre premenu hviezdy na trojuholník

$$Y_{12} = \frac{Y_1Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad Y_{13} = \frac{Y_1Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad Y_{23} = \frac{Y_2Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Paralelné spojenie reálnych **napät'ových zdrojov** môžeme podľa Théveninovej vety nahradiť jediným zdrojom (obr. 38).

Na riešenie je vhodné zameniť napät'ové modely prúdovými a použiť Kirchhoffovo pravidlo pre prúdy na spoločný uzol: $\mathbf{uY} = \mathbf{u}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = u_1Y_1 + u_2Y_2 + \dots + u_nY_n$

Takže
$$\mathbf{u} = \frac{u_1Y_1 + u_2Y_2 + \dots + u_nY_n}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} \quad \text{a} \quad Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$



Obr. 38

Pre dva paralelne spojené zdroje dostaneme výsledok:

$$u = \frac{u_1 Y_1 + u_2 Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{u_1 Z_2 + u_2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{a} \quad Z = \frac{1}{Y_1 + Y_2} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

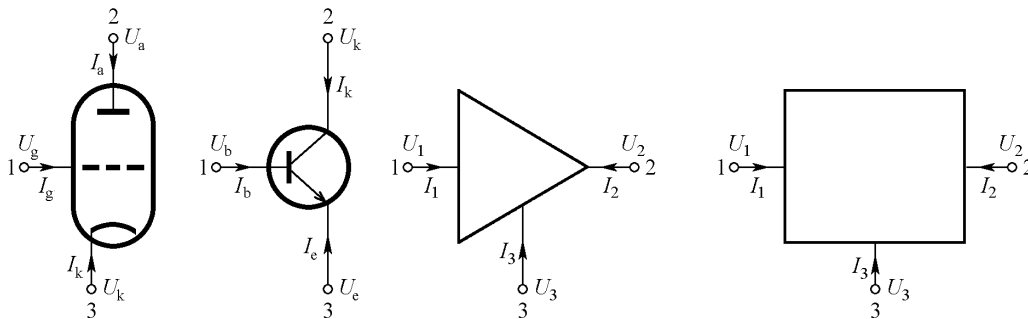
3.4 Neautonómne mnohobody

Doteraz sme sa nezaoberali takými elektronickými súčiastkami, ako sú elektrónky, bipolárne a unipolárne (poľom riadené) tranzistory, operačné zosilňovače a pod. To sú súčiastky, pomocou ktorých je možné meniť formu elektrickej energie, najčastejšie jednosmerné veličiny na striedavé, ale aj jednosmerné na jednosmerné, tiež striedavé na striedavé.

Fyzikálny rozbor činnosti týchto prvkov vedie k viac-menej komplikovaným matematickým modelom, z ktorých môžeme za istých idealizácií zostavovať rôzne obvody (nazývané *náhradné*), ktoré okrem pasívnych prvkov obyčajne obsahujú zdroje napätí a prúdov. Pre túto vlastnosť sa takýmto súčiastkam hovorí **aktívne prvky**, na rozdiel od pasívnych, ktoré energiu iba spotrebávajú alebo uschovávajú. Zdroje v obvodových modeloch súčiastok nie sú samostatné (autonómne), ale ich parametre závisia od iných parametrov obvodu, teda sú to riadené zdroje.

Každá aktívna súčiastka potrebuje vhodné elektródové napätia a prúdy, aby vôbec mohla pracovať. Dodáva ich napájací zdroj, bez ktorého aktívna súčiastka nie je činná. Pre každú hodnotu elektródových napätí a prúdov majú parametre náhradného obvodu iné hodnoty. Závislosť medzi napätiami a prúdmi rôznych elektród aktívneho prvku – **charakteristiky** – buď dodáva výrobca, alebo si ich môžeme zmerať. Vhodné elektródové napätia a prúdy pre činnosť aktívneho prvku sú v sieti charakteristik prezentované bodom s určenými súradnicami; hovoríme o pracovnom bode. Vlastnosti aktívneho prvku, a teda aj jeho náhradného obvodu, sú plne charakterizované hodnotami parametrov obvodu v danom pracovnom bode, sú jeho funkciu.

Aktívna súčiastka môže mať viacero modelov. Podľa účelu a požadovanej činnosti súčiastky z nich vyberieme optimálny.



Obr. 39

Elektrónka, tranzistor, operačný zosilňovač sú vlastne neautonómne trojbody (obr. 39). Všetky môžeme modelovať *trojbody* z obr. 39b. Z Kirchhoffovho pravidla pre prúdy vyplýva, že nezávislé sú iba dva uzly trojbody ($I_1 + I_2 + I_3 = 0$). Jeden z uzlov môžeme voliť za referenčný. V praxi to býva uzol spoločný vstupnej a výstupnej slučky. Z toho sú odvodené názvy ako tranzistor v zapojení so spoločným kolektorom, elektrónka v zapojení so spoločnou mriežkou a pod. V trojbody si môžeme vybrať ktorýkoľvek z uzlov za referenčný, vhodným prečíslovaním dosiahneme, že to bude vždy bod 3. Matematický model trojbody je

$$\begin{array}{l} I_1 = I_1(U_1, U_2) \\ I_2 = I_2(U_1, U_2) \end{array} \quad \text{alebo} \quad \begin{array}{l} U_1 = U_1(I_1, I_2) \\ U_2 = U_2(I_1, I_2) \end{array} \quad \text{alebo} \quad \begin{array}{l} U_1 = U_1(I_1, I_2) \\ I_2 = I_2(U_1, U_2) \end{array} \quad \text{atď...}$$

Všeobecne sú to nelineárne funkcie, preto trojbody nemožno hocikedy modelovať lineárnymi obvodmi. Keďže pre nelineárne obvody neplatí princíp superpozície, musíme mnohobody linearizovať, t. j. obmedziť sa na také veľkosti napätí a prúdov, aby obvody bolo možné nahradiť lineárnymi modelmi. To

nám umožní analyzovať obvody s viacbodmi v prijateľnom čase a s dostatočnou presnosťou, ale iba v obmedzenom rozsahu napätí a prúdov.

Pracovný bod trojvodu je charakterizovaný istými hodnotami napätí a prúdov. Napr.

$$\begin{aligned} I_{1A} &= I_1(U_{1A}, U_{2A}) \\ I_{2A} &= I_2(U_{1A}, U_{2A}) \end{aligned}$$

V okolí pracovného bodu A môžeme tieto funkcie rozvinúť do Taylorových radov:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1A} + \frac{\partial I_1}{\partial U_1}(U_1 - U_{1A}) + \frac{\partial I_1}{\partial U_2}(U_2 - U_{1A}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_1}{\partial U_1^2}(U_1 - U_{1A})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_1}{\partial U_1 \partial U_2}(U_1 - U_{1A})(U_2 - U_{1A}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_1}{\partial U_2^2}(U_2 - U_{1A})^2 + \dots \\ I_2 &= I_{2A} + \frac{\partial I_2}{\partial U_1}(U_1 - U_{1A}) + \frac{\partial I_2}{\partial U_2}(U_2 - U_{1A}) + \dots \end{aligned}$$

Obmedzíme sa na tak malé okolie pracovného bodu, aby sa diferencie vyšších rádov dali zanedbať voči ostatným členom rozvoja. Ak označíme $I_i - I_{iA} = \Delta I_i$, $U_i - U_{iA} = \Delta U_i$, matematický model prejde do tvaru

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= \frac{\partial I_1}{\partial U_1} \Delta U_1 + \frac{\partial I_1}{\partial U_2} \Delta U_2 \\ \Delta I_2 &= \frac{\partial I_2}{\partial U_1} \Delta U_1 + \frac{\partial I_2}{\partial U_2} \Delta U_2 \end{aligned}$$

Zmeny ΔU , ΔI napätia a prúdov sú vyvolané najčastejšie tým, že obvod spracováva signál v čase premenný, napr. $\Delta I = I \sin(\omega t + \varphi)$. Ďalej budeme diferencie napätia a prúdov označovať malými písmenami: $\Delta I = i$, $\Delta U = u$, a tak nový zápis matematického modelu trojvodu je:

$$i_1 = y_{11}u_1 + y_{21}u_2$$

$$i_2 = y_{21}u_1 + y_{22}u_2$$

Jednotlivé parciálne derivácie sú diferenciálne parametre trojvodu, majú rozmer admitancie a majú aj svoje názvy a symboly.

$$\left. \begin{array}{l} y_{11} \text{ vstupná} \\ y_{12} \text{ spätná} \\ y_{21} \text{ prevodová} \\ y_{22} \text{ výstupná} \end{array} \right\} \text{ admitancia trojvodu .}$$

Vo všeobecnosti je matematický model trojvodu sústava dvoch lineárnych rovníc, nazývaných tiež imitančné rovnice, a podľa fyzikálneho rozmeru diferenciálnych parametrov je určený aj ich názov. Pre trojbody je možných šesť základných matematických modelov:

závislé premenne	nezávislé premenne	sústava rovníc
i_1, i_2	u_1, u_2	<i>admitančná</i>
u_1, u_2	i_1, i_2	<i>impedančná</i>
i_1, u_1	u_2, i_2	<i>kaskádna</i>
u_1, i_2	i_1, u_2	<i>hybridná</i>
i_1, u_2	u_1, i_2	<i>spätná hybridná</i>

V literatúre sa stretne hlavne s prvými štyrmi. Sú však všetky rovnocenné a z parametrov jednej sústavy sa dajú určiť parametre inej. Všeobecné vlastnosti týchto modelov skúma teória dvojbrán (v staršej literatúre – štvorpólov).

Trojbod môže byť (a veľmi často aj býva) pripojený do obvodu tak, že ani jeden z uzlov obvodu nemá nulový potenciál. V takom prípade musíme do matematického modelu pridať potenciál (napätie) aj prúd tretieho uzla (obr. 39b). Dostaneme tri rovnice,

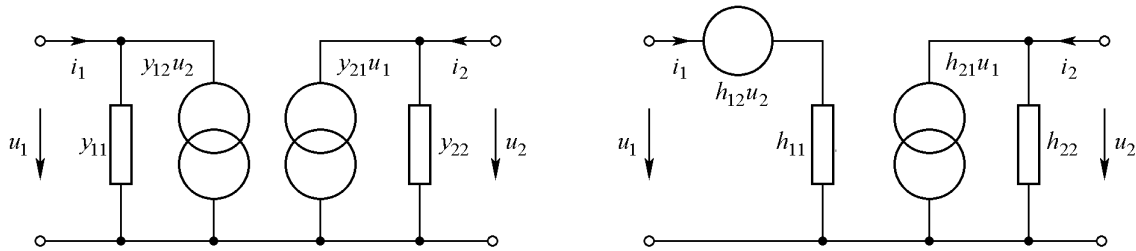
$$i_1 = y_{11}(u_1 - u_3) + y_{12}(u_2 - u_3) = y_{11}u_1 + y_{12}u_2 - (y_{11} + y_{12})u_3$$

$$i_2 = y_{21}(u_1 - u_3) + y_{22}(u_2 - u_3) = y_{21}u_1 + y_{22}u_2 - (y_{21} + y_{22})u_3$$

$$i_3 = -(i_1 + i_2) = -(y_{11} + y_{21})u_1 - (y_{12} + y_{22})u_2 + (y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22})u_3,$$

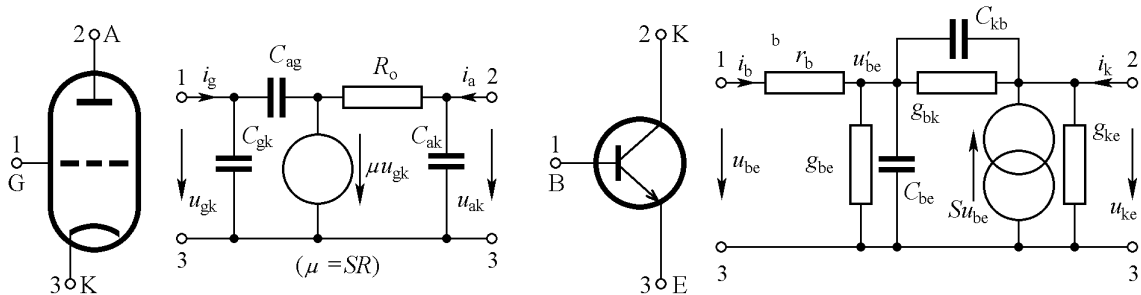
ktoré nazývame úplnou sústavou imitančných rovníc. Je síce lineárne závislá, ale v prípade, že je troj- bod súčasťou väčšieho obvodu, umožňuje zostaviť pre tento obvod úplnú sústavu rovníc.

Na základe matematického modelu môžeme teraz vytvoriť model obvodu, ktorý nahrádza mnohobod a nazvať ho **náhradný obvod**. Na obr. 40 sú náhradné obvody trojvodu odvodené z admitančných a hybridných rovníc.



Obr. 40

Náhradný obvod trojvodu je aktívna dvojbrána. Aktívna preto, že obsahuje aspoň jeden aktívny prvok. Býva ním *parametrický* (riadený, závislý, neautonómny) zdroj napätia alebo prúdu. Analýza fyzikálnych dejov v mnohobode a vytvorenie fyzikálneho modelu nám dovoľuje zostrojiť príslušný náhradný obvod. Hodnoty jeho parametrov sa určujú meraním. Pre elektrónku (triódu) a bipolárny tranzistor sú vhodné náhradné obvody, vyhovujúce pre väčšinu praktických použití, na obr. 41



Obr. 41

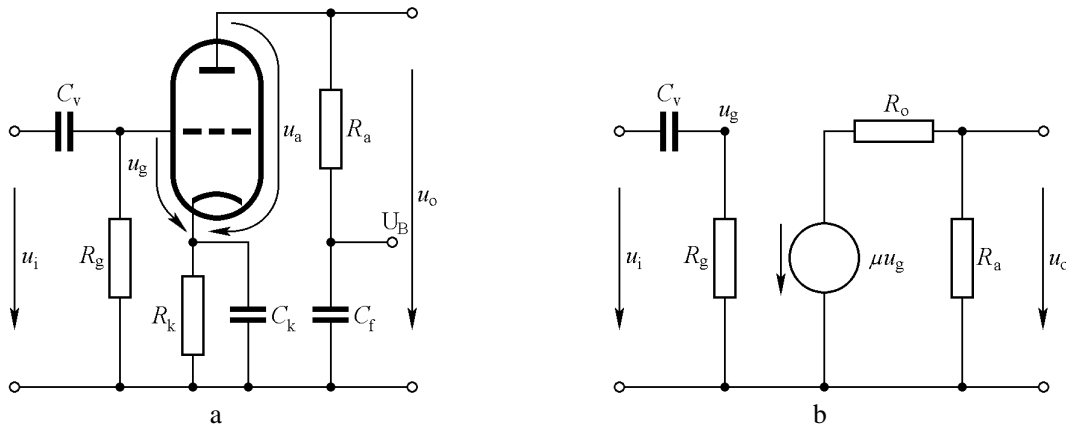
Podľa konkrétnych podmienok, v ktorých má trojbod pracovať, (napr. kmitočtový rozsah) a podľa požadovanej presnosti analýzy, volíme medzi jednoduchšími a zložitejšími modelmi. Napríklad pre nízkofrekvenčné zapojenia elektrónok a tranzistorov môžeme z náhradných obvodov vypustiť všetky kapacity a väčšinou aj považovať $g_{bk} \rightarrow \infty$, $r_b = 0$.

Hodnoty parametrov náhradných obvodov pre aktívne prvky spravidla výrobca zmeria, štatisticky vyhodnotí a dodáva vo forme konštrukčného katalógu zákazníčkovi. V obchodných katalógoch sú

obyčajne y alebo h parametre pre jeden pracovný bod. Tieto údaje slúžia len na rýchlu orientáciu pri výbere súčiastky.

Príklad 24. Základné zapojenie elektrónky ako zosilňovača napätia pre nízke a stredné kmitočty je na obr. 42a. Treba určiť vstupnú a výstupnú impedanciu a činiteľ prenosu napätia (napät'ové zosilnenie).

Vyjdeme zo základného predpokladu, že elektrónku (tranzistor atď.) môžeme nahradiť lineárnym obvodom. Na základe princípu superpozície analyzujeme obvod zvlášť pre jednosmerné napätia a prúdy, a zvlášť pre striedavé veličiny (signál). V prvom prípade vynecháme z náhradnej schémy elektrónky všetky kondenzátory. Odpor R_k slúži pre nastavenie pracovného bodu: prechodom prúdu I_{aA} cez odpor R_k sa vytvára pracovné napätie mriežky U_{gA} . Kondenzátor C_k sa vždy volí tak veľký, aby pre najnižší kmitočtet signálu bola jeho impedancia $1/\omega C_k$ oveľa menšia ako R_k , teda dvojicu $R_k C_k$ môžeme pre signál nahradiť skratom. Ak $R_k \ll 1/S$ kondenzátor C_k netreba. Podobne filtračný kondenzátor C_f a napájací zdroj U_B predstavujú pre signál skrat. Zakreslením náhradného obvodu elektrónky do schémy zohľadnením uvedených predpokladov možno obvod z obr. 42a nahradiť modelom, ktorého schéma je na obr. 42b. Tento už ľahko analyzujeme.



Obr. 42

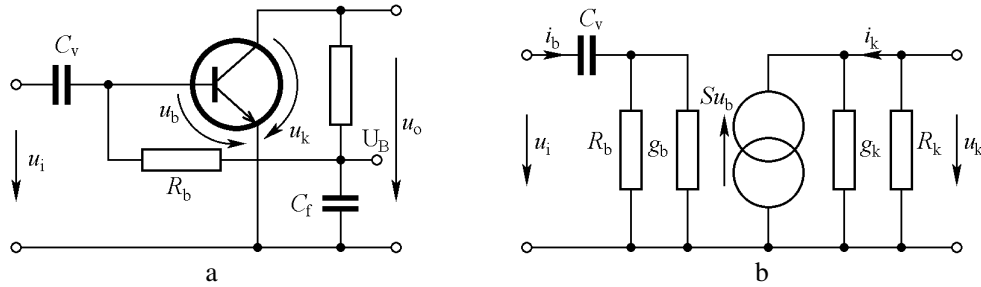
Vstupná impedancia	$Z_i = R_g + 1/j\omega C_v$
Výstupná impedancia	$Z_o = R_a R_o / (R_a + R_o)$
Riadiace napätie elektrónky je	$u_g = u_i \frac{j\omega C_v R_g}{1 + j\omega C_v R_g}$
Anódový prúd	$i_a = \frac{\mu u_g}{R_a + R_o} = \mu u_i \frac{j\omega C_v R_g}{(R_a + R_o)(1 + j\omega C_v R_g)}$
Výstupné napätie	$u_o = -i_a R_a = -\mu u_i \frac{R_a}{R_a + R_o} \frac{j\omega C_v R_g}{(1 + j\omega C_v R_g)}$
Hľadaný napät'ový prenos je	$K_u = \frac{u_o}{u_i} = -\frac{\mu R_a}{R_a + R_o} \frac{j\omega C_v R_g}{(1 + j\omega C_v R_g)}$

Príklad 25. Základné zapojenie kremíkového tranzistora ako zosilňovača napätia pre nízke a stredné kmitočty je na obr. 43a. Zaujímame sa o tie isté veličiny ako v prípade elektrónkového zosilňovača z príkladu 24.

Bázový prúd v pracovnom bode je určený odporom R_b ($U_{BE} = 0,6 \text{ V}$ otvára tranzistor)

$$I_{bA} = \frac{U_B - 0,6V}{R_b}$$

Pre vnútorný odpor zdroja U_B a filtračný kondenzátor C_f platí rovnaká úvaha ako v predchádzajúcom príklade. V Giaciolettiho náhradnom obvode tranzistora z obr. 41b môžeme zanedbať kapacity, r_b a g_{bk} . Náhradný obvod riešeného zosilňovača je na obr. 43b.



Obr. 43

Vstupná impedancia	$Z_i = \frac{j\omega C_v + G_b + g_b}{j\omega C_v(G_b + g_b)}$	kde $G_b = 1/R_b$
Výstupná impedancia	$Z_o = \frac{R_k r_k}{R_k + r_k}$	kde $r_k = 1/g_k$
Riadiace napätie tranzistora	$u_b = \frac{u_i}{Z_i} \frac{1}{G_b + g_b} = u_i \frac{j\omega C_v}{j\omega C_v(G_b + g_b)}$	
Kolektorový prúd	$i_k = -\frac{u_o}{R_k}$	
Výstupné napätie	$u_o = (-Su_b + i_k)r_k = (-Su_b - u_o/R_k)r_k$, po úprave	
	$u_o = -\frac{Su_b R_k}{R_k + r_k} = -u_i \frac{SR_k}{R_k + r_k} \frac{j\omega C_v}{j\omega C_v(G_b + g_b)}$	
Napät'ový prenos je	$K_u = \frac{u_o}{u_i} = -\frac{SR_k}{R_k + r_k} \frac{j\omega C_v}{j\omega C_v(G_b + g_b)}$	

Z uvedených príkladov je jasné, že pre komplikovanejšie obvody by táto analýza trvala neprijateľne dlho, najmä ak by neboli možné spomenuté zjednodušenia. Na urýchlenie výpočtových postupov uvedieme dve metódy.

4 MATICOVÉ METÓDY ANALÝZY ELEKTRICKÝCH OBVODOV

V predošlých príkladoch sme matematické modely obvodov vhodnou operátorovou metódou upravili na sústavu lineárnych algebraických rovníc pre obrazy napätí a prúdov. Riešenia týchto sústav sú rozpracované v lineárnej algebre veľmi podrobne a v súčasnej dobe jestvuje množstvo vhodných programov pre počítače, ktoré vyriešia aj rozsiahle sústavy rovníc.

Jedna z rýchlych výpočtových metód využíva teóriu matic a determinantov. Výhody tejto metódy spočívajú v tom, že netreba zostavovať rovnice pre obvody, ale prvky matic môžeme písať priamo zo schémy obvodu.

Z rôznych maticových postupov sa obmedzíme na metódu slučkových prúdov a metódu uzlových napätí, pričom druhú z nich rozpracujeme ako zovšeobecnenú metódu uzlových napätí v maticovom vyjadrení.

4.1 Metóda slučkových prúdov v maticovom zápise

Budeme analyzovať obvod z obrázku 44a. Jeho graf s úplným stromom je na obr. 44b, voľba nezávislých slučiek s ich orientáciou na obr. 44c. Rovnice pre obrazy napätí a prúdov sú:

$$i_1(R_1 + R_1 + 1/j\omega C_2) - i_2R_1 - i_3/j\omega C_2 = u_i$$

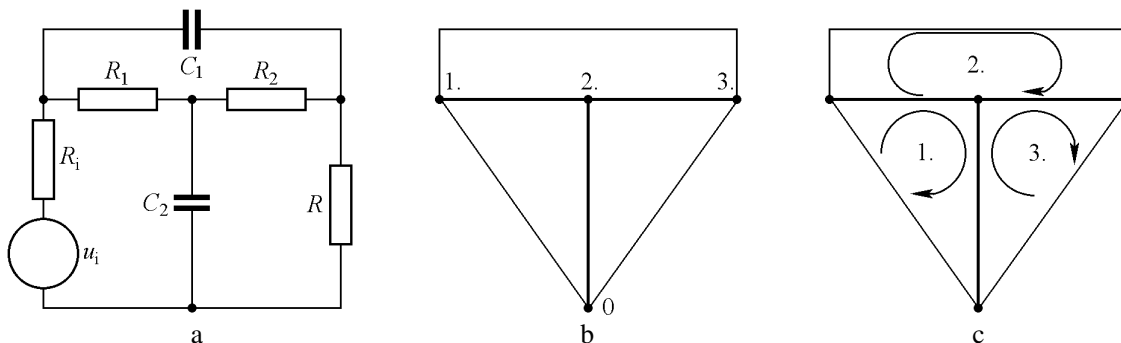
$$-i_1R_1 + i_2(R_1 + R_2 + 1/j\omega C_1) - i_3R_2 = 0$$

$$-i_1/j\omega C_2 - i_2R_2 + i_3(1/j\omega C_2 + R_2 + R) = 0$$

Môžeme ich zapísať v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_1 + 1/j\omega C_2 & -R_1 & 1/j\omega C_2 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + 1/j\omega C_1 & -R_2 \\ -1/j\omega C_2 & -R_2 & R_2 + R + 1/j\omega C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z maticového zápisu a z pohľadu na obr. 44a ľahko zistíme pravidlo, podľa ktorého môžeme priamo zo schémy zapísať impedančnú maticu obvodu pre metódu slučkových prúdov. Impedančnú preto, že všetky prvky matice sú tvorené zloženiami impedancií prvkov obvodu.



Obr. 44

Všetky prvky v hlavnej uhlopriečke majú znamienko plus, všetky ostatné znamienko mínus. To vysvetľuje, prečo je vhodné voliť všetky orientácie slučiek rovnaké. Ak by sme túto voľbu nedodrжали, nemali by prvky mimo hlavnú uhlopriečku rovnaké znamienko, čo by mohlo viesť k omylom pri zostavovaní matice.

Prvok matice, ktorý leží v r -tom riadku a s -tom stĺpci budeme označovať a_{rs} . Pravidlá na zostavenie impedančnej matice sú jednoduché:

1. prvky matice v hlavnej uhlopriečke z_{rr} sú rovné súčtu impedancií v r -tej slučke
2. prvky matice mimo hlavnej uhlopriečky v r -tom riadku a s -tom stĺpci sú rovné súčtu impedancií vo vetve spoločnej r -tému a s -tému obvodu a tento súčet má v prípade rovnakej orientácie r -tej a s -tej slučky záporné znamienko, v opačnom prípade kladné. Pretože táto impedancia spoločnej vetvy nezávisí od poradia výberu slučiek, je $z_{rs} = z_{sr}$ a teda impedančná matica je symetrická. Táto vlastnosť slúži výborne na prvú kontrolu správnosti zápisu matice.

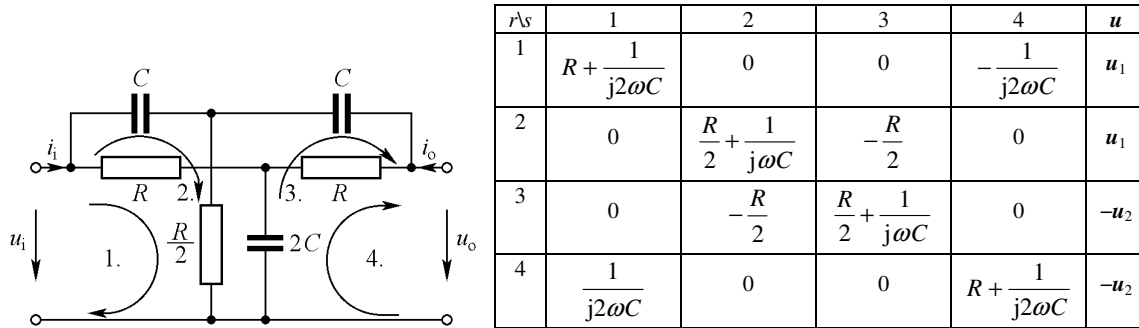
Všeobecný tvar maticového zápisu je

$$(\mathbf{u}) = (\mathbf{Z}) \cdot (\mathbf{i})$$

kde (\mathbf{Z}) je impedančná matica, (\mathbf{i}) vektor prúdu, (\mathbf{u}) vektor napätia, čo sú názvy bežne užívané v literatúre.

Pre analýzu obvodu je z praktického hľadiska výhodné zapisovať impedančnú maticu a vektor napätia do tabuľkovej formy.

Príklad 26. Zapišme impedančnú maticu a vektor napätia pre obvod z obr. 45a, v ktorom sú zakreslené aj nezávislé slučky a ich orientácie.



Obr. 45a

4.2 Metóda uzlových napätí v maticovom zápise

Vrátíme sa k obvodu z obr. 44. Za referenčný uzol s potenciálom 0 si zvolíme dolný uzol. Zvyšné uzly očísľujeme zľava doprava od 1 po 3. Pre jednotlivé uzly môžeme napísať rovnice. Najprv však napäťový zdroj zmeníme na prúdový podobne ako na obr. 31. Rovnice obvodu sú:

$$u_1 G_1 + (u_1 - u_2) G_1 + (u_1 - u_3) j\omega C_1 = u_1 (G_1 + G_1 + j\omega C_1) - G_1 u_2 - j\omega C_1 u_3 = u_1 G_1$$

$$(u_2 - u_1) G_1 + u_2 j\omega C_2 + (u_2 - u_3) G_3 = -u_1 G_1 + u_2 (G_1 + j\omega C_2 + G_3) - u_3 G_3 = 0$$

$$(u_3 - u_1) j\omega C_1 + (u_3 - u_2) G_2 + u_3 G = -u_1 j\omega C_1 - u_2 G_2 + u_3 (j\omega C_1 + G_2 + G) = 0$$

Môžeme ich zapísať v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_1 + j\omega C_1 & -G_1 & -j\omega C_1 \\ -G_1 & G_1 + j\omega C_1 + G_3 & -G_2 \\ -j\omega C_1 & -G_2 & -j\omega C_1 + G_2 + G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 G_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z tohto maticového zápisu ľahko zistíme podobné pravidlá pre zápis admitančnej matice v metóde uzlových napätí aké boli u impedančnej matice:

1. Prvky v hlavnej uhlopriečke y_{rr} sú rovné súčtu admitancií pripojených do uzla r , a to s kladným znamienkom.

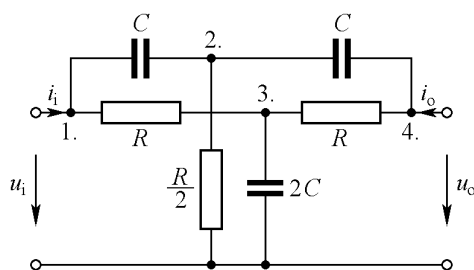
2. Prvky matice mimo hlavnej uhlopriečky v r -tom riadku a s -tom stĺpci sú rovné súčtu admitancií so záporným znamienkom, ktoré spájajú uzol r a uzol s . Pretože súčet týchto admitancií sa nemení s poradím uzlov, aj admitančná matica je symetrická, čo umožňuje prvú kontrolu správnosti zápisu matice.

Všeobecný zápis je

$$(i) = (Y) \cdot (u)$$

kde (Y) je admitančná matica.

Príklad 27. Zapíšeme admitančnú maticu a vektor prúdu pre obvod z obr. 45b

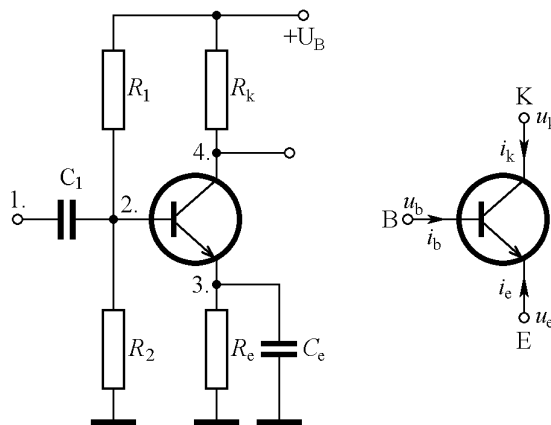


Obr. 45b

$r \setminus s$	1	2	3	4	i
1	$G + j\omega C$	$-j\omega C$	$-G$	0	i_i
2	$-j\omega C$	$2G + j2\omega C$	0	$-j\omega C$	0
3	$-G$	0	$2G + j2\omega C$	$-G$	0
4	0	$-j\omega C$	$-G$	$G + j\omega C$	i_o

4.3 Zovšeobecnená metóda uzlových napätí

Na zostavovanie admitančnej matice nepotrebujeme kresliť strom, počítat vetvy ani vhodne voliť slučky. Jednoducho očísľujeme uzly a môžeme písať prvky matice priamo do schémy obvodu. Pri zložitejších obvodoch dáva táto metóda spravidla najmenší počet rovníc. Ďalšia výhoda spočíva v dôslednom využití princípu superpozície pre obvody, ktoré obsahujú neautonómne mnohobody. Netreba poznať ich náhradné schémy, úplne postačuje matematický model v maticovom tvare. Admitančnú maticu dostaneme podľa princípu superpozície ako súčet matice obvodu bez mnohobodu a matice mnohobodu.



Obr. 46

Príklad 28. Zostavíme admitančnú maticu pre obvod z obr. 46a.

Admitančné rovnice pre tranzistor z obr. 46b sú (pozri príklad 25 a obr. 43b):

$$i_b = g_b u_b + S_s u_k - (g_b + S_s) u_e$$

$$i_k = S u_b + g_k u_k - (S + g_k) u_e$$

$$i_e = -(g_b + S) u_b - (S_s + g_k) u_k + (g_b + S + S_s + g_k) u_e$$

Vrátíme sa k schéme na obr. 46a. Budeme brať do úvahy iba premenné napätia a prúdy. O stav jednosmerných veličín, ktoré vlastne určujú pracovný bod tranzistora, sa nebudeme zaujímať. To je prvé použitie princípu superpozície v tomto príklade. Ďalšou jeho aplikáciou bude, že vyberieme tranzistor z obvodu a napíšeme zvlášť admitančnú maticu preň a zvlášť pre zvyšok obvodu.

Admitančná matica obvodu bez tranzistora je:

$r \setminus s$	1	2	3	4
1	$j\omega C_1$	$-j\omega C_1$	0	0
2	$-j\omega C_1$	$G_1 + G_2 + j\omega C_1$	0	0
3	0	0	$G_e + j\omega C_e$	0
4	0	0	0	G_k

Admitančná matica tranzistora samotného je:

$r \setminus s$	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	g_b	$-g_b - S_s$	S_s
3	0	$-g_b - S$	$g_b + S_s + S + g_k$	$-S_s + g_k$
4	0	0	0	g_k

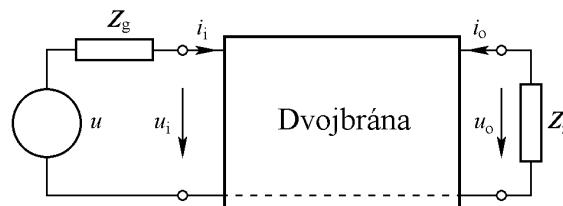
Výsledná admitančná matica obvodu je podľa princípu superpozície rovná súčtu oboch matíc, teda

$r \setminus s$	1	2	3	4
1	$j\omega C_1$	$-j\omega C_1$	0	0
2	$-j\omega C_1$	$G_1 + G_2 + j\omega C_1 + g_b$	$-g_b - S_s$	S_s
3	0	$-g_b - S$	$G_e + j\omega C_e + g_b + S_s + S + g_k$	$-S_s + g_k$
4	0	0	0	$g_k + G_k$

4.3.1 Úprava zapojenia na dvojbránu

V prípade rozsiahlejších elektronických sústav sa zvyčajne zaujímame len o ich časti, ktoré obsahujú jeden vstup (dvojicu uzlov – bránu) a jeden výstup (tiež bránu). Takéto obvody sa spravidla nazývajú **dvojbrány**.

U dvojbrán sa nezaujíname o celkový stav obvodu, ale iba o parametre vstupu, výstupu a o ich vzájomný súvis. Všetky potrebné údaje môžeme určiť zo štyroch veličín: vstupného napätia a prúdu, a výstupného napätia a prúdu. Väčšina praktických úloh sa redukuje na určenie stavu zovšeobecneného obvodu podľa obr. 47, navyše často majú vstup a výstup jeden uzol spoločný (na obr. čiarkovaný spoj), ktorému môžeme bez ujmy na všeobecnosti priradiť potenciál rovný nule (referenčný uzol).



Obr. 47

Nech má obvod z obr. 47 n nezávislých uzlov, teda jeho stav môžeme opísať n rovnicami. V maticovom tvare vyzerajú takto:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_i \\ \vdots \\ \mathbf{i}_o \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} & \cdots & \mathbf{y}_{1n} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} & \cdots & \mathbf{y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{i1} & \mathbf{y}_{i2} & \cdots & \mathbf{y}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{o1} & \mathbf{y}_{o2} & \cdots & \mathbf{y}_{on} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{n1} & \mathbf{y}_{n2} & \cdots & \mathbf{y}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_o \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad (\mathbf{i}) = (\mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{u})$$

Výstupné veličiny \mathbf{i}_o a \mathbf{u}_o sú viazané vzťahom $\mathbf{i}_o = -\mathbf{u}_o \mathbf{Y}_z$. Ak tento výraz vložíme do vektora prúdu, môžeme rovnicu v o -tom riadku upraviť preložením $-\mathbf{u}_o \mathbf{Y}_z$ z ľavej strany rovnice na pravú. Tým sa zmení koeficient \mathbf{y}_{oo} pri \mathbf{u}_o na $\mathbf{y}_{oo} + \mathbf{Y}_z$. Maticový zápis sústavy rovníc opisujúcich obvod z obr. 47 bude vyzeráť takto:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_i \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} & \cdots & \mathbf{y}_{1n} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} & \cdots & \mathbf{y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{i1} & \mathbf{y}_{i2} & \cdots & \mathbf{y}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{o1} & \mathbf{y}_{o2} & \cdots & \mathbf{y}_{oo} + \mathbf{Y}_z & \cdots & \mathbf{y}_{on} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{n1} & \mathbf{y}_{n2} & \cdots & \mathbf{y}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_o \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad (\mathbf{i}') = (\mathbf{Y}') \cdot (\mathbf{u}')$$

Vektor prúdu má jediný nenulový prvok, a to v i -tom riadku vstupný prúd \mathbf{i}_i .

Použijeme Cramerovo pravidlo a vypočítame napätie \mathbf{u}_i a \mathbf{u}_o .

$$\mathbf{u}_i = \frac{D'_i}{D'} = \frac{D'_{ii}}{D'} \mathbf{i}_i = \frac{D_{ii} + D_{ii,oo} \mathbf{Y}_z}{D + D_{oo} \mathbf{Y}_z} \mathbf{i}_i$$

$$\mathbf{u}_o = \frac{D'_o}{D'} = \frac{D'_{io}}{D'} \mathbf{i}_i = \frac{D_{io}}{D + D_{oo} \mathbf{Y}_z} \mathbf{i}_i$$

Pripomíname, že D je determinant admitančnej matice (\mathbf{Y}) a D' determinant admitančnej matice (\mathbf{Y}') . D'_s vznikne výmenou s -tého stĺpca D' za vektor prúdu (\mathbf{i}') . $D'_{rs} = M'_{rs} \cdot (-1)^{r+s}$, kde M'_{rs} je minor determinantu D' v ktorom vynecháme r -tý riadok a s -tý stĺpec. $D'_{rs,RS} = M'_{rs,RS} \cdot (-1)^{r+s+R+S+v}$, $M'_{rs,RS}$ dostaneme z D vynechaním riadkov r a R , a stĺpcov s a S . v je počet výmen riadkov a stĺpcov tak, aby boli indexy usporiadané vzostupne podľa veľkosti: $D_{15,33} = M_{13,35} \cdot (-1)^{1+5+3+3+1}$ na usporiadanie bolo treba vymeniť navzájom 3. a 5. stĺpec.

Pretože matice (\mathbf{Y}) a (\mathbf{Y}') teda aj determinanty D a D' sa líšia jediným prvkom (\mathbf{y}_{oo} resp $\mathbf{y}_{oo} + \mathbf{Y}_z$), môžeme determinant D'_{ii} rozvinúť podľa o -tého riadku a po malej úprave dostaneme rovnosť $D'_{ii} = D_{ii} + D'_{ii,oo} \mathbf{Y}_z$. Podobným postupom $D' = D + D_{oo} \mathbf{Y}_z$. V determinante D'_{io} je prvok $\mathbf{y}_{oo} + \mathbf{Y}_z$ už vynechaný, preto $D'_{io} = D_{io}$.

Z výrazov pre \mathbf{u}_i a \mathbf{u}_o môžeme ľahko určiť vstupnú impedanciu, prenos napätia a prenos prúdu.

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{u}_i}{\mathbf{i}_i} = \frac{D_{ii} + D_{ii,oo} \mathbf{Y}_z}{D + D_{oo} \mathbf{Y}_z} = \frac{D_{ii} \mathbf{Z}_z + D_{ii,oo}}{D \mathbf{Z}_z + D_{oo}}$$

$$K_u = \frac{u_o}{u_i} = \frac{D_{io}}{D_{ii} + D_{ii,oo}Y_z} = \frac{D_{io}Z_z}{D_{ii}Z_z + D_{ii,oo}}$$

$$K_i = \frac{i_o}{i_i} = \frac{-u_o Y_z}{i_i} = -\frac{D_{io}Y_z}{D + D_{oo}Y_z} = -\frac{D_{io}}{DZ_z + D_{oo}}$$

Na určenie výstupnej impedancie použijeme Théveninovu vetu. Skratujeme zdroj \mathbf{u} na vstupe, takže vstup bude zaťažený impedanciou \mathbf{Z}_g zdroja a impedanciu \mathbf{Z}_z na výstupe odpojíme. Potom pripojíme na výstup zdroj prúdu \mathbf{i}_o a vypočítame napätie na výstupe. Pretože v tejto úprave je $\mathbf{i}_i = -\mathbf{u}_i \mathbf{Y}_g$, bude obvod opísaný sústavou rovníc v maticovom tvare $(\mathbf{i}'') = (\mathbf{Y}'') \cdot (\mathbf{u})$, kde (\mathbf{i}'') je vektor prúdu, ktorý má všetky prvky nulové okrem \mathbf{i}_o a matica (\mathbf{Y}'') sa od matice (\mathbf{Y}) líši jediným prvkom $\mathbf{y}_{ii} + \mathbf{Y}_g$ voči \mathbf{y}_{ii} . Podobným postupom ako pri napájajú obvodu do vstupu určíme

$$\mathbf{u}_o = \frac{D''_o}{D''} = \frac{D''_{oo} \mathbf{i}_o}{D''} \frac{D_{oo} + D_{ii,oo} \mathbf{Y}_g}{D + D_{ii} \mathbf{Y}_g}$$

Výstupná impedancia teda je

$$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{u}_o}{\mathbf{i}_o} = \frac{D_{oo} + D_{ii,oo} \mathbf{Y}_g}{D + D_{ii} \mathbf{Y}_g} = \frac{D_{oo} \mathbf{Z}_g + D_{ii,oo}}{D \mathbf{Z}_g + D_{ii}}$$

Pretože pri prípadnom neusporiadaní indexov i a o treba robiť dve výmeny, jednu pre riadky, druhú pre stĺpce, je $D_{oo,ii} = D_{ii,oo}$.

Veľmi častým prípadom pri analýze je vyšetrenie stavu nezaťaženého obvodu napájaného ideálnym zdrojom napätia (alebo prúdu). Vtedy je $\mathbf{Z}_z \rightarrow \infty$ a $\mathbf{Z}_g \rightarrow 0$ ($\mathbf{Z}_g \rightarrow \infty$) a dvojbránové parametre budú mať tvar

$$\mathbf{Z}_{i0} = \frac{D_{ii}}{D}; \quad K_{u0} = \frac{D_{io}}{D_{ii}}; \quad K_{i0} = 0; \quad \mathbf{Z}_{o0} = \frac{D_{ii,oo}}{D_{ii}}; \quad \mathbf{Z}_{oo} = \frac{D_{oo}}{D}$$

Prehľad najbežnejšie používaných parametrov pri analýze dvojbrán je v tabuľke:

Parameter	označenie	všeobecne	naprázdno	nakrátko
Vstupná impedancia	$\mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\mathbf{i}_i}$	$\frac{D_{ii} \mathbf{Z}_z + D_{ii,oo}}{D \mathbf{Z}_z + D_{oo}}$	$\frac{D_{ii}}{D}$	$\frac{D_{ii,oo}}{D_{oo}}$
Výstupná impedancia	$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{u}_o}{\mathbf{i}_o}$	$\frac{D_{oo} \mathbf{Z}_g + D_{ii,oo}}{D \mathbf{Z}_g + D_{ii}}$	$\frac{D_{oo}}{D}$	$\frac{D_{ii,oo}}{D_{ii}}$
Činiteľ napät'ového prenosu	$\mathbf{K}_u = \frac{\mathbf{u}_o}{\mathbf{u}_i}$	$\frac{D_{io} \mathbf{Z}_z}{D_{ii} \mathbf{Z}_z + D_{ii,oo}}$	$\frac{D_{io}}{D_{ii}}$	0
Činiteľ prúdového prenosu	$\mathbf{K}_i = \frac{\mathbf{i}_o}{\mathbf{i}_i}$	$\frac{-D_{io} \mathbf{Z}_z}{D \mathbf{Z}_z + D_{oo}}$	0	$-\frac{D_{io}}{D_{oo}}$

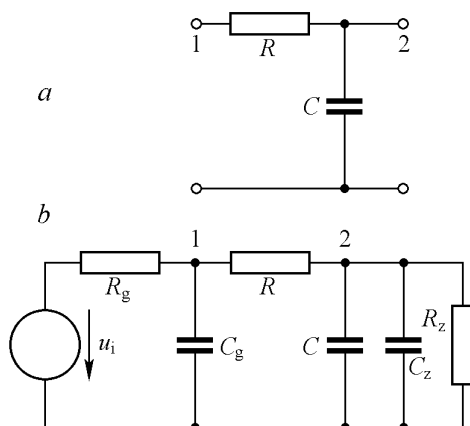
Príklad 29. Preskúmame RC obvod z obr. 48a.

Admitančná matica obvodu je

$$(\mathbf{Y}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G + j\omega C \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Z nej môžeme určiť rovno parametre:

$$\mathbf{Z}_i = \frac{D_{11}}{D} = R + \frac{1}{j\omega C}; \quad \mathbf{Z}_o = \frac{D_{11,22}}{D_{11}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}; \quad \mathbf{K}_u = \frac{D_{12}}{D_{11}} = \frac{(-1)^3(-G)}{G + j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



Obr. 48

Pri experimentálnom vyšetrowaní (meraní) tohto obvodu pripojíme na vstup (svorka 1) zdroj signálu s napätím u a vnútorným odporom R_g . Spojovací kábel má kapacitu C_g , ktorú často na rozdiel od ostatných jeho parametrov nemôžeme zanedbať. Na výstup obvodu (svorka 2) pripojíme voltmeter alebo osciloskop so vstupným odporom R_z a to káblom s kapacitou C_z . Pôvodný nekomplikovaný obvod sa pri tom najjednoduchšom meraní stane oveľa zložitejší (obr. 48b). Jeho admitančná matica je

$$(Y) = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & G_g & -G_g & 0 \\ \hline 2 & -G_g & G_g + j\omega C_g + G & -G \\ \hline 3 & 0 & -G & G + j\omega(C + C_z) + G_z \end{array}$$

Použijeme tabuľku používaných parametrov a určíme dvojbránové parametre.

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{D_{11}}{D} = \frac{(G_g + j\omega C_g + G)[G + j\omega(C + C_z) + G_z] - G^2}{G_g \{ (j\omega C_g + G)[G + j\omega(C + C_z) + G_z] + G_z \} - G^2} = \\ &= \frac{1}{G_g} + \frac{1}{j\omega C_g + \frac{G[j\omega(C + C_z) + G_z]}{G + j\omega(C + C_z) + G_z}} = R_g + C_g \parallel (R + R_z \parallel C \parallel C_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_o &= \frac{D_{11,33}}{D_{11}} = \frac{G_g + j\omega C_g + G}{(G_g + j\omega C_g + G)[G + j\omega(C + C_z) + G_z] - G^2} = \\ &= \frac{1}{j\omega(C + C_z) + G_z + \frac{G_g(j\omega C_g + G)}{G_g + j\omega C_g + G}} = R_z \parallel C \parallel C_z \parallel (R + R_g \parallel C_g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_u &= \frac{D_{13}}{D_{11}} = \frac{GG_g}{(G_g + j\omega C_g + G)[G + j\omega(C + C_z) + G_z] - G^2} = \\ &= \frac{R_z}{R + R_g + R_z} \frac{1}{1 - \frac{R_z}{R + R_g + R_z} \omega^2 (C + C_z) R R_g + j\omega [C_g \cdot (R + R_z) \parallel R_g + (C + C_z) \cdot R_z \parallel (R + R_g)]} \end{aligned}$$

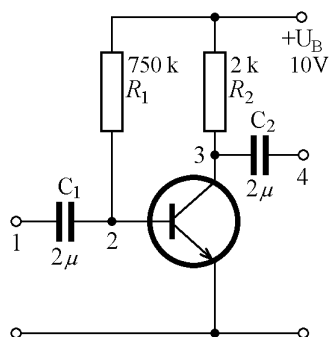
Na určenie prúdového prenosu vypustíme z admitančnej matice (Y) hodnotu G_z :

$$K_i = \frac{-D_{13}}{DR_z + D_{33}} = \frac{-1}{1 - \omega^2 C_g (C + C_z) R R_z + j\omega [C_g (R + R_z) + (C + C_z) R_z]}$$

Označenie $R \parallel r$ znamená výsledný odpor paralelného spojenia odporov R a r , teda hodnotu $Rr/(R+r)$. Podobne $R \parallel C$ nahrádza hodnotu $R/(1+j\omega RC)$.

Príklad 30. Určíme Z_i , Z_o a K_u pre obvod z obr. 49.

Admitančná matica tohto najjednoduchšieho tranzistorového zosilňovača je



Obr. 49

$$(Y) = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & j\omega C_1 & -j\omega C_1 & 0 & 0 \\ 2 & -j\omega C_1 & j\omega C_1 + G_1 + g_b & S_s & 0 \\ 3 & 0 & S & G_2 + j\omega C_2 + g_k & -j\omega C_2 \\ 4 & 0 & 0 & -j\omega C_2 & -j\omega C_2 \end{array}$$

Pre signálové napätie predstavuje zdroj U_B skrat s emitorom. Parametre tranzistora sú $S = 100 \text{ mA/V}$, $\beta = 200$, $r_b = 2 \text{ k}\Omega$, $r_k = 60 \text{ k}\Omega$, $S = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ mA/V}$. Spätňú strmost' S_s môžeme považovať za nulovú. Pomocou tabuľky zo str. 69 určíme:

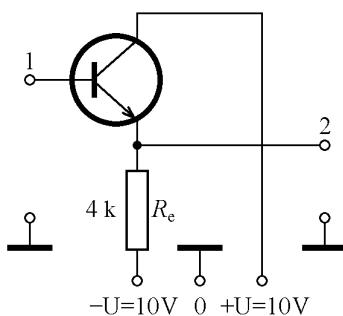
$$Z_i = \frac{D_{11}}{D} = \frac{j\omega C_1 + G_1 + g_b}{j\omega C_1(G_1 + g_b)} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_1 r_b}{R_1 + r_b} = \frac{1}{j\omega C_1} + R_1 \parallel r_b = \frac{79,6 \cdot 10^3}{jf} + 1995 \approx 2000 \left(1 + \frac{40}{jf} \right)$$

$$Z_o = \frac{D_{44}}{D} = \frac{j\omega C_2 + G_2 + g_k}{j\omega C_2(G_2 + g_k)} = \frac{1}{j\omega C_2} + R_2 \parallel r_k = \frac{79,6 \cdot 10^3}{jf} + 1935 \approx Z_i$$

$$K = \frac{D_{14}}{D_{11}} = \frac{(-1)^5 (-j\omega C_1) S (-j\omega C_2)}{(j\omega C_1 + G_1 + g_b)(G_2 + g_k) j\omega C_2} = -S(R_2 \parallel r_k) \frac{R_1 \parallel r_b}{\frac{1}{j\omega C_1} + R_1 \parallel r_b} = \frac{3,86 \cdot 10^6}{\frac{79,6 \cdot 10^3}{jf} + 1995} \approx \frac{193}{1 + \frac{40}{jf}}$$

Z číselných hodnôt vidno, že najnižší prenášaný kmitočet je 40 Hz.

Príklad 31. Určíme dvojbránové parametre pre obvod z obr. 50.



Obr. 50

Pre signálové napätie predstavujú napájacie zdroje $-U$ a $+U$ skrat na kostru. Zapojenie sa navrhuje tak, aby jednosmerný potenciál bázy bol voči kostre nulový. Parametre tranzistora sú rovnaké ako v príklade 30. Admitančná matica je:

$$(Y) = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & g_b & -g_b - S_s \\ 2 & -g_b - S & G_e + g_b + S_s + S + g_k \end{array}$$

Spättnú strmost' môžeme zanedbať. Použijeme rovnosť $Sr_b = \beta$ a pomocou tabuľky zo strany 59. určíme:

$$Z_i = \frac{D_{11}}{D} = \frac{G_e + g_b + S + g_k}{g_b(G_e + g_k)} = r_b + (\beta + 1)(r_k \parallel R_e) = 2 \text{ k}\Omega + 201 \cdot 3,75 \text{ k}\Omega = 755,75 \text{ k}\Omega \approx \beta R_e$$

Pretože výstupná impedancia obvodu bude závisieť od impedancie zdroja signálu, budeme predpokladať, že impedancia zdroja je Z_g .

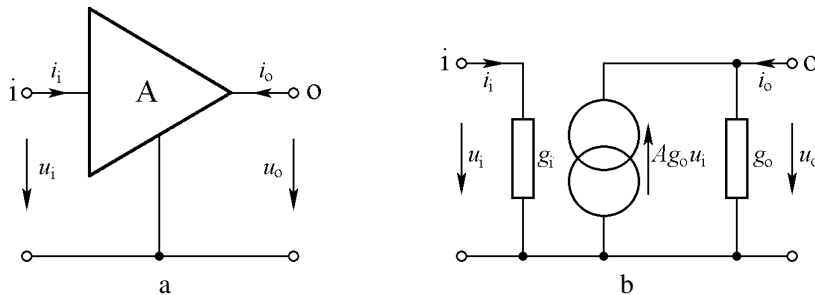
$$Z_o = \frac{D_{22}Z_g + D_{11,22}}{DZ_g + D_{11}} = \frac{g_b Z_g + 1}{g_b Z_g (G_e + g_k) + G_e + g_b + g_k} = R_e r_b \parallel r_k \parallel (Z_g + r_b) \parallel \left(\frac{Z_g}{\beta} + \frac{1}{S} \right) \approx \frac{Z_g}{\beta} + 10 \text{ }\Omega$$

$$K_u = \frac{D_{12}}{D_{11}} = \frac{(-1)^3(-g_b - S)}{G_e + g_b + S + g_k} = \frac{\beta + 1}{\beta + 1 + r_b/(r_k \parallel R_e)} = 0,994$$

Zapojenie je vhodné použiť tam, kde vstupná impedancia je $\beta R_e \gg Z_g$. Vtedy je Z_g porovnateľné s R_e , a teda výstupná impedancia je veľmi malá ($\approx 1/S$). Zapojenie teda slúži ako *transformátor impedancie* [$Z \rightarrow (Z/\beta) + (1/S)$].

4.3.2 Obvody s operačnými zosilňovačmi

Zosilňovač z obr. 51a, ktorého náhradný obvod je na obr. 51b je charakterizovaný vstupným odporom r_i , výstupným odporom r_o a napäťovým zosilnením A .



Obr. 51

Jeho admitančná matica je

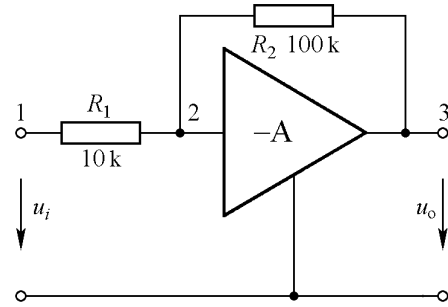
$$(Y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & o \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ o \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_i & 0 \\ -Ag_o & g_o \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Úlohou zosilňovača spravidla býva zväčšiť signál pri zachovaní jeho tvaru, pričom má čo najmenej pozmeniť parametre obvodu, do ktorého je zaradený. Zvláštnym prípadom zosilňovača je operačný zosilňovač, ktorý bol pôvodne vyvinutý na vytváranie matematických operácií na analógových počítačoch. Operačný zosilňovač je jednosmerný zosilňovač s veľkým zosilnením, veľmi veľkým vstupným a veľmi malým výstupným odporom. Prívlastok *jednosmerný* znamená, že zosilňovač prenáša aj signál s nulovým (alebo veľmi malým) kmitočtom.

Aby zapojenie s jednosmerným zosilňovačom, ktorého $|A| \gg 1$, $r_i \gg 1$, $r_o \rightarrow 0$, bolo stabilné (pozri ods. 6.3), treba zaviesť zápornú spätú väzbu. Toto sa bude dať spraviť jednoducho v prípade, že $A < 0$.

Príklad 32. Riešme obvod z obr. 52. Nech $A = 10^5$, $r_i = 1/g_i = 1 \text{ M}\Omega$, $r_o = 1/g_o = 100 \text{ }\Omega$, $Z_g = 1 \text{ k}\Omega$, záťaž je Z . Symbol $-A$ na obrázku znamená, že zosilnenie je záporné. Admitančná matica obvodu je

$$(Y) = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & G_1 & -G_1 & 0 \\ 2 & -G_1 & G_1 + G_2 + g_i & -G_2 \\ 3 & 0 & -G_2 + Ag_o & G_2 + g_o \end{array}$$



Obr. 52

Dvojbránové parametre určíme opäť podľa tabuľky z ods. 4.3.1:

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{D_{11}Z + D_{11,33}}{DZ + D_{33}} = \frac{[(G_1 + G_2 + g_i)(G_2 + g_o) + G_2(-G_2 + Ag_o)]Z + G_1 + G_2 + g_i}{G_1[(G_2 + g_i) + G_2(-G_2 + Ag_o)]Z + G_1(G_2 + g_i)} = \\ &= R_1 + r_i \parallel \left[\frac{R_2 + r_o}{A+1} + \frac{r_o R_2}{(A+1)Z} \right] \approx R_1 + \frac{R_2 + r_o}{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_o &= \frac{D_{33}Z_g + D_{11,33}}{DZ_g + D_{11}} = \\ &= \frac{G_1(G_2 + g_i)Z_g + G_1 + G_2 + g_i}{[G_1(G_2 + g_i)Z_g + G_1 + G_2 + g_i]g_o + (Ag_o + g_i)G_1G_2Z_g + G_2(G_1 + Ag_o + g_i)} = \\ &= r_o \parallel [R_2 + r_i \parallel (R_1 + Z_g)] \parallel \frac{r_o R_2}{A} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_i} + \frac{1}{R_1 + Z_g} \right) \approx r_o \frac{1 + R_2/(R_1 + Z_g)}{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_u &= \frac{D_{13}Z}{D_{11}Z + D_{11,33}} = \frac{-G_1(-G_2 + Ag_o)Z}{[(G_1 + G_2 + g_i)(G_2 + g_o) + G_2(-G_2 + Ag_o)]Z + G_1 + G_2 + g_i} = \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1 - r_o/AR_2}{1 + \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_i} \right) (R_2 + r_o) + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{r_i} \right) \frac{r_o}{AZ}} \approx -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{1 + R_2/R_1}{A} \left(1 + \frac{r_o}{Z} \right)} \end{aligned}$$

Zanedbanie vplyvu konečnej hodnoty zosilnenia A sa najviac prejaví na výstupnom odpore. Vo väčšine prípadov môžeme použiť limitné vzťahy pre $Ag_o \rightarrow -\infty$.

Vo výrazoch Z_i a K_u sa vyskytujú podiely determinantov odvodených z admitančnej matice (D_{ii} , D_{io} , D). V každom z týchto determinantov môžeme o -ty riadok vydeliť hodnotou Ag_o , ktorá sa vo výrazoch pre Z_i a K_u vyskytne v čitateli aj v menovateli príslušného podielu, teda ju možno vykrátiť. Výslednú hodnotu výrazov pre vstupnú impedanciu a napätový prenos dostaneme ako limitu príslušných podielov pre $Ag_o \rightarrow -\infty$.

	Číselné hodnoty		
	z presného vzťahu	z približného vzťahu	pre $A \rightarrow -\infty$
Z_i	10 000,01 Ω	10 001 Ω	10 000 $\Omega = R_1$
Z_o	1 019 $\cdot 10^{-2}$ Ω	1 009 $\cdot 10^{-2}$ Ω	0 Ω
K_u	-9,999 89	-9,998 9	-10 = $-R_2/R_1$

V praxi postupujeme tak, že namiesto matice (Y) budeme používať hneď jej determinant D , v ktorom urobíme vyššie spomínanú úpravu.

Upravme determinant admitančnej matice obvodu z obr. 52. Výstupu odpovedá riadok 3, vyberieme z neho pred determinant Ag_o :

$$D = Ag_o \begin{vmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + g_i & -G_2 \\ 0 & -G_2/Ag_o + 1 & G_2/Ag_o + 1/A \end{vmatrix} = Ag_o D^+$$

Limita determinantu D^+ je

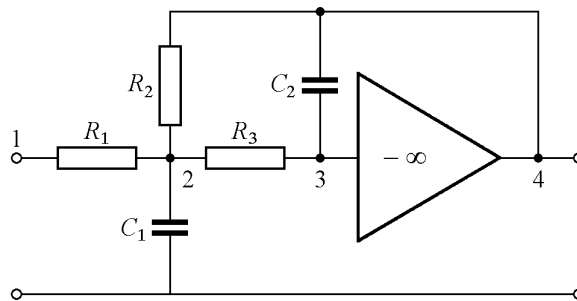
$$D^* = \lim_{Ag_o \rightarrow \infty} D^+ = \begin{vmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + g_i & -G_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Zovšeobecnením tohto postupu získame pravidlo pre ďalšie výpočty: v determinante sústavy v riadku o budú všetky prvky nulové, okrem prvku $y_{oi} = 1$.

Príklad 33. Vypočítame dvojbránové parametre obvodu z obr. 53. Jeho admitančná matica je:

$$(Y) = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ 2 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 j\omega C_1 & -G_3 & -G_2 \\ 3 & 0 & -G_3 & G_3 + j\omega C_2 + g_i & -j\omega C_2 \\ 4 & 0 & -G_2 & -j\omega C_2 + Ag_o & G_2 + j\omega C_2 + g_o \end{array}$$

pričom $Ag_o \rightarrow \infty$, $g_o \rightarrow \infty$, $g_i \rightarrow 0$.



Obr. 53

Pri výpočte výstupnej impedancie vychádzame z admitančnej matice (Y): $Z_o = D_{44}/D$. Pretože v determinante D_{44} chýba štvrtý riadok matice (Y), bude hodnota determinantu konečné číslo, ale hodnota determinantu D matice (Y) pre $Ag_o \rightarrow \infty$ je $D \rightarrow \infty$. Hodnota výstupnej admitancie obvodu preto je $Z_o = 0$. Na určenie hodnôt Z_i a K_u použijeme determinant D^* matice (Y), ktorý podľa uvedeného postupu je:

$$D^* = \begin{vmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 + j\omega C_1 & -G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_3 & G_3 + j\omega C_2 & -j\omega C_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

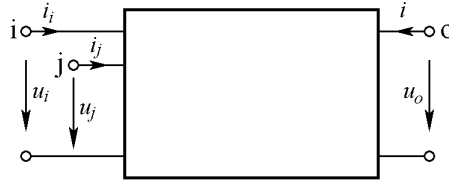
$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{D_{11}}{D} = \lim_{A_{g_o} \rightarrow \infty} \frac{A_{g_o} D_{11}^+}{A_{g_o} D^+} = \frac{D_{11}^*}{D^*} = \frac{(-1)[-j\omega C_2(G_1 + G_2 + G_3 + j\omega C_1) - G_2 G_3]}{(-1)G_1[(G_2 + G_3 + j\omega C_1)(-j\omega C_2) - G_2 G_3]} = \\ &= \frac{1}{G_1} + \frac{j\omega C_2}{(G_2 + G_3 + j\omega C_1)j\omega C_2 + G_2 G_3} = R_1 + R_2 \parallel R_3 \parallel j\omega C_1 \parallel (R_2 R_3 j\omega C_2) \approx R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_u &= \lim_{A_{g_o} \rightarrow \infty} \frac{A_{g_o} D_{14}^+}{A_{g_o} D_{11}^+} = \frac{D_{14}^*}{D_{11}^*} = \frac{(-1)^5 (-G_1)(G_3)}{(-1)[-j\omega C_2(G_1 + G_2 + G_3 + j\omega C_1) - G_2 G_3]} = \\ &= -\frac{R_2/R_1}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_2 R_3 + j\omega C_2 (R_2 + R_3 + R_2 R_3/R_1)} \end{aligned}$$

4.3.3 Obvody s dvoma vstupmi

Často sa vyskytuje prípad, keď výstupný signál je odozvou na dva, alebo viac vstupných signálov. Napríklad sčítanie resp. rozdiel dvoch napätí, amplitúdovo modulované napätie, zmiešavanie dvoch signálov s rôznymi kmitočtami atď. Budeme riešiť obvod s dvoma vstupmi z obr. 54.

Admitancie záťaže a zdrojov na vstupoch i a j započítame do admitančnej matice nezaťaženého obvodu. Tým sa zmenia pôvodné admitancie: y_{ii} na $y_{ii} + Y_{gi}$, y_{jj} na $y_{jj} + Y_{gj}$ a y_{oo} na $y_{oo} + Y_o$. Tento na vstupoch a výstupe zaťažený obvod môžeme považovať za obvod napájaný ideálnymi zdrojmi prúdu i_i a i_j , ktorý už nie je na výstupe zaťažený, teda $i_o = 0$.



Obr. 54

Maticový zápis rovníc, ktoré opisujú obvod na obr. 54 je $(Y)(u) = (i)$, kde vektor prúdu má všetky prvky okrem prúdu i_i a i_j rovné nule. Pomocou Cramerovho pravidla určíme napätia u_i , u_j , u_o :

$$u_i = \frac{D_i}{D} = \frac{D_{ii}i_i + D_{ji}i_j}{D}; \quad u_j = \frac{D_j}{D} = \frac{D_{ij}i_i + D_{jj}i_j}{D}; \quad u_o = \frac{D_o}{D} = \frac{D_{io}i_i + D_{jo}i_j}{D}$$

Prúdy i_i a i_j si vyjadríme pomocou vstupných napätí u_i , u_j :

$$\begin{aligned} i_i &= D \frac{u_i D_{jj} - u_j D_{ji}}{D_{ii} D_{jj} - D_{ij} D_{ji}} = \frac{u_i D_{jj} - u_j D_{ji}}{D_{ii, jj}} \\ i_j &= D \frac{-u_i D_{ij} + u_j D_{ii}}{D_{ii} D_{jj} - D_{ij} D_{ji}} = -\frac{u_i D_{ij} - u_j D_{ii}}{D_{ii, jj}} \end{aligned}$$

Pri úprave sme použili vzťah známy z algebry pre dvojité algebraický doplnok

$$DD_{ij, jj} = D_{ii} D_{jj} - D_{ij} D_{ji}$$

Rovnice pre prúdy i_i a i_j dosadíme do vzťahu pre výstupné napätie a výsledok upravíme:

$$u_o = \frac{D_{io}(u_i D_{jj} - u_j D_{ji}) - D_{jo}(u_i D_{ij} - u_j D_{ii})}{DD_{ii, jj}} = \frac{u_i(D_{io} D_{jj} - D_{jo} D_{ij}) + u_j(D_{ii} D_{jo} - D_{io} D_{ji})}{DD_{ii, jj}}$$

Opäť použijeme vzťah pre dvojité algebraický doplnok:

$$\mathbf{u}_o = \mathbf{u}_i \frac{D_{io,jj}}{D_{ii,jj}} + \mathbf{u}_j \frac{D_{ii,jo}}{D_{ii,jj}}$$

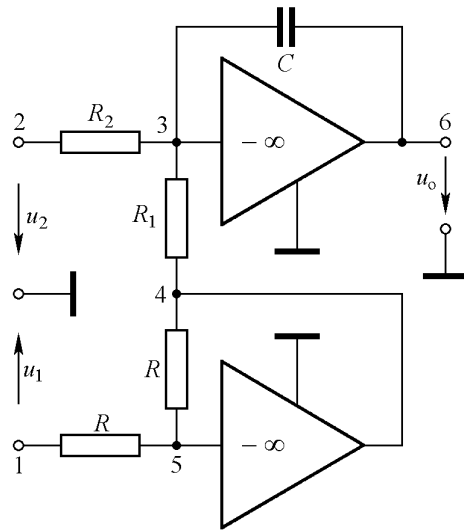
Často je výhodné poznať vzťah medzi vstupným a výstupnými napätiami v tvare $\mathbf{u}_o = \mathbf{K}_-(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) + \mathbf{K}_+(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j)$. Ľahko zistíme, že

$$\mathbf{K}_+ = \frac{D_{io,jj} + D_{ii,jo}}{2} \quad \text{a} \quad \mathbf{K}_- = \frac{D_{io,jj} - D_{ii,jo}}{2}$$

Príklad 34. Zaujímá nás výstupné napätie u_o v obvode na obr. 55.

Sú použité dva ideálne operačné zosilňovače, ktorých výstupy sú pripojené do uzlov 4 a 6, preto limitné úpravy pre $A \rightarrow \infty$ sa budú týkať riadkov 4 a 6. Determinant D^* admitančnej matice je:

$$D^* = \begin{vmatrix} G & 0 & 0 & 0 & -G & 0 \\ 0 & G_2 & -G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_1 + G_2 + j\omega C & -G_1 & 0 & -j\omega C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -G & 0 & 0 & -G & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Obr. 55

Výstupné napätie u_o bude:

$$\mathbf{u}_o = \frac{D_{16,22}^* \mathbf{u}_1 + D_{11,26}^* \mathbf{u}_2}{D_{11,22}^*} = \frac{-GG_1 \mathbf{u}_1 + GG_2 \mathbf{u}_2}{-Gj\omega C} = \frac{1}{j\omega CR_1} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{j\omega CR_2} \mathbf{u}_2$$

Iný výraz pre výstupné napätie je

$$\mathbf{u}_o = \frac{1}{j\omega C} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \frac{1}{j\omega C} \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$$

Ak je $R_1 = R_2$, zapojenie predstavuje integrátor rozdielu napätí. Prečo integrátor? Výstupné napätie je $\mathbf{u}_o = K\mathbf{u}_i/j\omega$. Výraz $1/j\omega$ znamená, že originál výstupného napätia je $u_o(t) = K \int u_i(t) dt$. (Pozri vlastnosť 5. z ods. 2.2.3 alebo 6. z ods. 2.2.1).

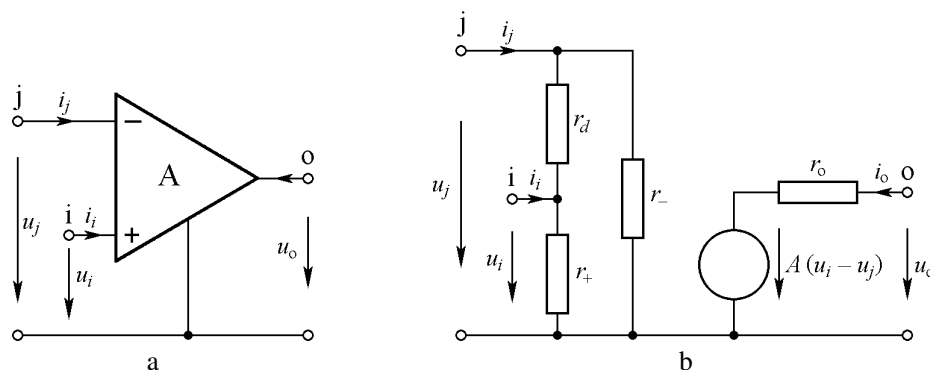
Pod pojmom operačný zosilňovač sa najčastejšie rozumie dvojjstupový zosilňovač, pričom zosilnenia sú A a $-A$. Schéma takéhoto zosilňovača je na obr. 56a a jeho náhradná schéma na obr. 56b. Typické hodnoty parametrov sú:

$$r_+ \approx r_- \approx 500 \text{ M}\Omega; \quad r_d \approx 10^6 \text{ }\Omega; \quad |A| \approx |-A| \approx 10^5; \quad r_o = 60 - 150 \text{ }\Omega$$

To sú hodnoty pre kmitočet $f \approx 0$ až 10 Hz. Od kmitočtu $f_0 = 5$ až 10 Hz zosilnenie klesá a je

$$A = \frac{A_0}{1 + jff_0}$$

kde A_0 je zosilnenie pri kmitočte 0 Hz. Úvahy o obvodoch s operačnými zosilňovačmi budeme robiť obyčajne pre také kmitočty, keď A budeme môcť považovať za $A \rightarrow \infty$. V prvom priblížení sa obmedzíme na ideálny operačný zosilňovač.



Obr. 56

Admitančná matica operačného zosilňovača z obr. 56 je:

$$(Y) = \begin{array}{c|ccc} & i & j & o \\ \hline i & g_+ + g_d & -g_d & 0 \\ j & -g_d & g_- + g_d & 0 \\ o & -Ag_o & Ag_o & g_o \end{array}$$

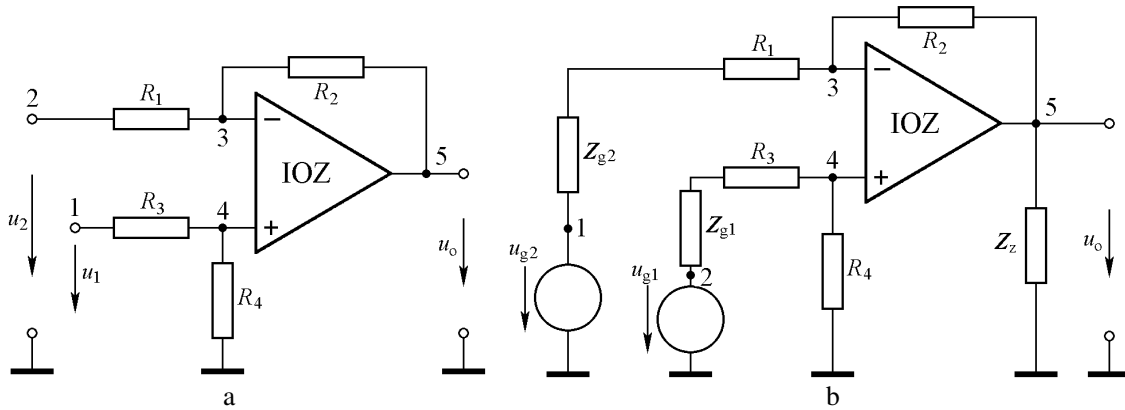
Pre ideálny operačný zosilňovač ($g_+, g_-, g_d \rightarrow 0, g_o \rightarrow \infty, A \rightarrow \infty$) budeme musieť vychádzať z determinantu admitančnej matice v limitnom prípade, t. j. riadok o predelíme výrazom Ag_o a vypočítame hodnotu nového determinantu ako limitu pre $Ag_o \rightarrow \infty$. V riadku o budú nenulové iba prvky v i -tom a j -tom stĺpci, a to pre vstup (+) sa bude rovnáť zápornej jednotke ($a_{o+} = a_{oi} = -1$) a pre vstup (-) sa bude rovnáť jednotke ($a_{o-} = a_{oj} = 1$) (jednotka má opačné znamienko ako značka vstupu).

Príklad 35. Budeme riešiť obvod na obr. 57a. Admitančná matica (Y) je:

	1	2	3	4	5
1	G_3	0	0	$-G_3$	0
2	0	G_1	$-G_1$	0	0
3	0	$-G_1$	$G_1 + G_2 + g_d + g_-$	$-g_d$	$-G_2$
4	$-G_3$	0	$-g_d$	$G_3 + G_4 + g_d + g_+$	0
5	0	0	$-G_2 + Ag_o$	$-Ag_o$	$G_2 + g_o$

Pre ideálny operačný zosilňovač je $g_d, g_-, g_+ \rightarrow 0$ a $g_o, A \rightarrow \infty$, preto budeme ďalej používať limitu D/Ag_o pre Ag_o rastúce k nekonečnu.

$$D^* = \begin{vmatrix} G_3 & 0 & 0 & -G_3 & 0 \\ 0 & G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ 0 & -G_1 & G_1 + G_2 & 0 & -G_2 \\ -G_3 & 0 & 0 & G_3 + G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$



Obr. 57

Výstupné napätie u_o je

$$\begin{aligned}
 u_o &= \frac{D_{15,22}u_1 + D_{25,11}u_2}{D_{11,22}} = \frac{(-1)(-G_3)(G_1 + G_2)u_1 + (-1)(-G_1)(G_3 + G_4)(-1)u_2}{-G_2(G_3 + G_4)(-1)} = \\
 &= \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} u_1 - \frac{R_2}{R_1} u_2 = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_2}{R_1} \right) (u_1 - u_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1} \right) (u_1 + u_2) = \\
 &= \frac{R_1 R_4 + 2R_2 R_4 + R_2 R_3}{2R_1 (R_3 + R_4)} (u_1 - u_2) + \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{2R_1 (R_3 + R_4)} (u_1 + u_2)
 \end{aligned}$$

Posledný zlomok môže nadobudnúť hodnotu rovnú nule, vtedy výstupný signál závisí iba od rozdielu vstupných napätí. Rovnosti $R_1 R_4 = R_2 R_3$ hovoríme *podmienka potlačenia súčtového signálu*. Ak je splnená, tak

$$u_o = (u_1 - u_2) \cdot R_2 / R_1$$

V praktickom zapojení napätia u_1 a u_2 získavame zo zdrojov s nenulovým vnútorným odporom a rozdielový zosilňovač pracuje do nejakej záťaže (obr. 57b). Vnútorné impedancie zdrojov zmenia hodnoty odporov R_1 a R_2 , záťaž Z_z zmení v admitančnej matici prvok y_{oo} na $G_2 + g_o + Y_z$, avšak pre ideálny operačný zosilňovač sa v determinante zmenia iba hodnoty G_1 a G_3 na $G'_1 = 1/(Z_{g2} + R_1)$ a $G'_3 = 1/(Z_{g1} + R_3)$.

Vypočítame veľkosť vstupnej impedancie vstupu 1. Zdroj u_{g2} neovplyvní hodnotu tejto vstupnej impedancie, preto ho skratujeme a v obvode ponecháme iba jeho vnútorný odpor Z_{g2} . Uzol 2 je spojený s referenčným uzlom, teda v admitančnej matici, aj v jej determinante môžeme vynechať 2. riadok a 2. stĺpec.

$$Z_{11} = \frac{D_{11,22}^*}{D_{22}^*} = \frac{G_2(G'_3 + G_4)}{G'_3 G_2 G_4} = \frac{G'_3 + G_4}{G'_3 G_4} = R_3 + Z_{g1} + R_4$$

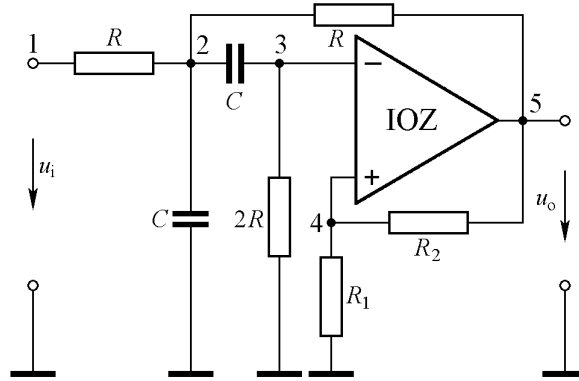
Podobne určíme vstupný odpor vstupu 2. Skratujeme zdroj u_{g1} , tým z determinantu D^* vypadnú 1. riadok a 1. stĺpec:

$$Z_{12} = \frac{D_{22,11}^*}{D_{11}^*} = \frac{G_2(G'_3 + G_4)}{G'_1(G'_3 + G_4)G_2} = \frac{G'_3 + G_4}{G'_3 G_4} = R_1 + Z_{g2}$$

Príklad 36. Zaujímá nás napäťový prenos obvodu z obr. 58.

Vyjdeme z limitnej hodnoty determinantu admitančnej matice

$$D^* = \begin{vmatrix} G & -G & 0 & 0 & 0 \\ -G & 2G+2j\omega C & -j\omega C & 0 & -G \\ 0 & -j\omega C & j\omega C+G/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1+G_2 & -G_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Obr. 58

Napät'ový prenos je:

$$\begin{aligned} K_u &= \frac{D_{15}^*}{D_{11}^*} = \frac{(-G)(-j\omega C)(G_1+G_2)}{2(G+j\omega C)(j\omega C+G/2)G_2+j\omega C[-j\omega C G_2+(-1)G(G_1+G_2)]} = \\ &= \frac{j\omega C G(G_1+G_2)}{G^2 G_2+j\omega C G(3G_2-G_1-G_2)-\omega^2 C^2 G_2} = \frac{j\omega R C(1+R_2/R_1)}{1+j\omega R C(3-1-R_2/R_1)-\omega^2 C^2 R^2} = \\ &= \frac{PK}{1+(3-K)P+P^2} \end{aligned}$$

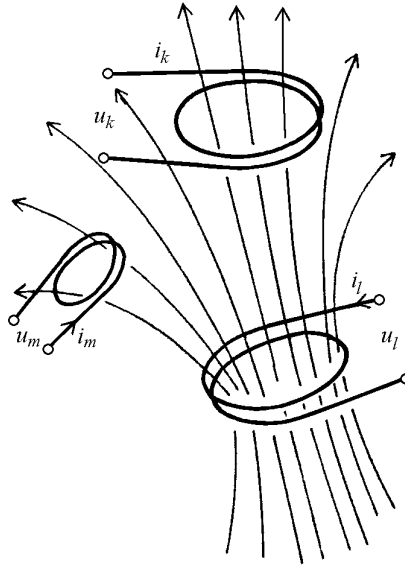
kde $K = 1 + R_2/R_1$ a $P = j\omega RC$. Pre $\omega_0 = 1/RC$ je $K_u = K/(3 - K)$ a $\text{Im}\{K_u\} = 0$, teda prenos je čisto reálny. Obvod sa správa ako pásmový priepust pri kmitočtoch blízkych $k f_0 = 1/(2\pi RC)$.

4.3.4 Obvody s indukčnými väzbami

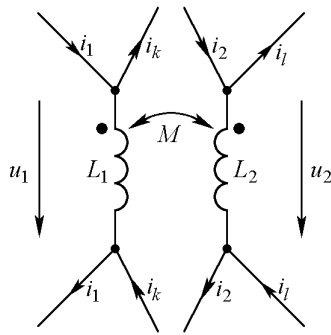
Sú to obvody s dvoma alebo viacerými prvkami, ktoré majú časti magnetických tokov spoločné (obr. 59), teda sú vzájomne indukčne viazané. Veľkosť tejto väzby charakterizujú koeficienty vzájomnej indukčnosti L_{kl} , L_{km} , L_{lm} . Napríklad napätie u_k (obr. 59) bude závisieť od zmeny prúdu i_k a vďaka vzájomným indukčnostiam aj od zmien prúdov i_l a i_m

$$u_k = L_k \frac{di_k}{dt} + L_{ik} \frac{di_l}{dt} + L_{mk} \frac{di_m}{dt}$$

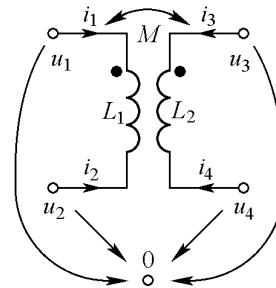
Je jasné, že zámennou koncov vinutia cievky sa zmení aj smer jej magnetického poľa, a teda aj polarita napätia indukovaného v nej. Koeficient vzájomnej indukčnosti môže mať kladné alebo záporné znamienko a jeho veľkosť závisí len od rozmerov a usporiadania cievok a od magnetických vlastností prostredia a platí preň vzťah $L_{ik} = L_{ki} = M$. Aby sme vedeli u indukčne viazaných obvodov jednoznačne určiť znamienko vzájomnej indukčnosti, označíme jeden z vývodov každej cievky dohovorovou značkou (bodkou). Potom bude $M > 0$ ak prúdy v oboch cievkach sú rovnako orientované vzhľadom na značku. V opačnom prípade bude $M < 0$.



Obr. 59



Obr. 60



Obr. 61

Napríklad pre dva indukzívne viazané prvky z obrázku 60 môžeme písať rovnice:

$$u_1 = j\omega L_1 i_1 - j\omega L_1 i_k + j\omega M i_2 - j\omega M i_l$$

$$u_2 = j\omega M i_1 - j\omega M i_k - j\omega L_2 i_2 - j\omega L_2 i_l$$

Vzhľadom na orientačnú značku sú prúdy i_1 a i_2 aj i_k a i_l súhlasné, ale i_1 a i_k s i_l aj i_2 a i_k s i_l nesúhlasné.

V metóde uzlových napätí budú admitančné matice zložitejšie, pretože vzájomné admitancie indukzívne viazaných prvkov nie sú recipročnými hodnotami vzájomných indukčností. Situáciu sťažuje aj skutočnosť, že každý z indukzívne viazaných prvkov v mnohých prípadoch vstupuje do obvodu s oboma uzlami (obr. 61). Rovnice, ktoré opisujú tento obvod, sú:

$$u_1 - u_2 = i_{1j}\omega L_1 + i_{3j}\omega M \qquad i_2 = -i_1$$

$$u_3 - u_4 = i_{1j}\omega M + i_{3j}\omega L_2 \qquad i_4 = -i_3$$

Riešením tejto sústavy dostaneme admitančné rovnice:

$$i_1 = (j\omega L_2 u_1 - j\omega L_2 u_2 - j\omega M u_3 + j\omega M u_4) / [\omega^2 (M^2 - L_1 L_2)]$$

$$i_2 = (-j\omega L_2 u_1 + j\omega L_2 u_2 + j\omega M u_3 - j\omega M u_4) / [\omega^2 (M^2 - L_1 L_2)]$$

$$i_3 = (-j\omega M u_1 + j\omega M u_2 + j\omega L_1 u_3 - j\omega L_1 u_4) / [\omega^2(M^2 - L_1 L_2)]$$

$$i_4 = (j\omega M u_1 - j\omega M u_2 - j\omega L_1 u_3 + j\omega L_1 u_4) / [\omega^2(M^2 - L_1 L_2)].$$

Ak uvážime, že $\omega^2(M^2 - L_1 L_2) / j\omega = j\omega(L_1 L_2 - M^2)$, tak admitančná matica obvodu z obrázku 61 je:

$$(\mathbf{Y}) = \frac{1}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \cdot \begin{pmatrix} L_2 & -L_2 & -M & M \\ -L_2 & L_2 & M & -M \\ -M & M & L_1 & -L_1 \\ M & -M & -L_1 & L_1 \end{pmatrix}.$$

V tomto tvare je admitančná matica nepoužiteľná, pretože pravidlá na určenie jej prvkov sú príliš ťažkopádne a náročné na pamäť. Avšak zjednodušenie je možné, ak si činiteľ vzájomnej indukčnosti vyjadríme pomocou koeficientu väzby k : $M^2 = k^2 L_1 L_2$. Potom je $j\omega(L_1 L_2 - M^2) = j\omega(1 - k^2)L_1 L_2$ a admitančná matica prejde do tvaru

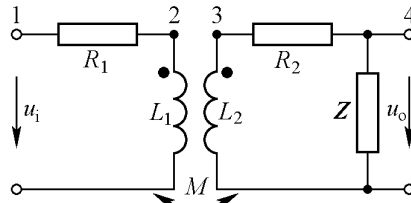
$$(\mathbf{Y}) = \frac{1}{j\omega(1 - k^2)} \cdot \begin{pmatrix} 1/L_1 & -1/L_1 & -k^2/M & k^2/M \\ -1/L_1 & 1/L_1 & k^2/M & -k^2/M \\ -k^2/M & k^2/M & 1/L_2 & -1/L_2 \\ k^2/M & -k^2/M & -1/L_2 & 1/L_2 \end{pmatrix}.$$

Postup zostavenia admitančnej matice v tomto tvare si zapamätáme pomerne ľahko: za admitancie vlastných indukčností píšeme $y_M = 1/j\omega L(1 - k^2)$ a vzájomných indukčností $y_M = k^2/j\omega M(1 - k^2)$. Pravidlá o znamienkach zostávajú v platnosti, teda mimo hlavnú uhlopriečku sú to záporné znamienka a v prípade dvojíc uzlov, z ktorých jeden je s orientačnou značkou a druhý nie, pristupuje ďalšia zmena znamienka, teda kladné znamienko. Prvok y_{13} matice pre obvod z obr. 61 bude $-k^2/j\omega M(1 - k^2)$ a prvok y_{22} bude $(-1)(-k^2)/j\omega M(1 - k^2) = k^2/j\omega M(1 - k^2)$.

Príklad 37. Vypočítame dvojbránové parametre transformátora z obr. 62.

Transformátor je zaťažený impedanciou $Z = R + jX$ a je napájaný zdrojom napätia s impedanciou $Z_g = R_g + jX_g$. Admitančná matica transformátora je:

	1	2	3	4
1	G_1	$-G_1$	0	0
2	$-G_1$	$G_1 + 1/j\omega L_1(1 - k^2)$	$-k^2/j\omega L_1(1 - k^2)$	0
3	0	$-k^2/j\omega L_1(1 - k^2)$	$G_2 + 1/j\omega L_1(1 - k^2)$	$-G_2$
4	0	0	$-G_2$	$-G_2$



Obr. 62

Na určenie dvojbránových parametrov budeme potrebovať determinanty

$$D = \frac{1}{-\omega^2 L_1 L_2 R_1 R_2}; \quad D_{11} = (R_1 + j\omega L_1) \cdot D; \quad D_{44} = (R_2 + j\omega L_2) \cdot D;$$

$$D_{14} = j\omega M \cdot D; \quad D_{11,44} = [(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2].$$

Pri všetkých úpravách sme využili vzťah $M^2 = k^2 L_1 L_2$.

$$\mathbf{Z}_i = \frac{D_{11}Z + D_{11,44}}{DZ + D_{44}} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z},$$

$$\begin{aligned} Z_o &= \frac{D_{44}Z_g + D_{11,44}}{DZ_g + D_{11}} = R_2 + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega L_1 + Z_g}, \\ K_u &= \frac{D_{14}Z}{D_{11}Z + D_{11,44}} = + \frac{j\omega MZ}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2 + Z) + \omega^2 M^2}, \\ K_i &= \frac{-D_{14}}{DZ + D_{44}} = + \frac{-j\omega MZ}{R_2 + j\omega L_2 + Z}. \end{aligned}$$

Vo výrazoch pre vstupnú a výstupnú impedanciu vystupuje „dodatkový“ člen $\omega^2 M^2 / (R_1 + j\omega L_1 + Z)$ resp. $\omega^2 M^2 / (R_2 + j\omega L_2 + Z_g)$, ktorý príslušnú impedanciu zväčšuje. Je to **pretransformovaná** impedancia. Pre sieťové transformátory určené na prenos energie pri zmene veľkosti napätia a prúdu býva koeficient väzby $k \approx 1$ a $(\omega L_1, \omega L_2) \gg (R_1, R_2, R_g, R, X_g, X)$.

Zátťaž pretransformovaná do primárneho obvodu je

$$\frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z} = \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + R)^2 + (\omega L_2 + X)^2} [(R_2 + R) - (j\omega L_2 + X)].$$

Zlomok na pravej strane rovnosti má hodnotu približne

$$\approx \frac{M^2}{L_2^2} \approx \frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2.$$

Pomer (N_1/N_2) počtu závitov primárnej a sekundárnej cievky sa nazýva *prevod transformátora*.

Budeme riešiť úlohu metódou obvodových prúdov. Impedančná matica obvodu je

$$(Z) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 + Z \end{array} \end{array}$$

Dvojbránové parametre vypočítame pomocou Cramerovho pravidla:

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{D}{D_{11}} = \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2 + Z) + \omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z}, \\ K_u &= \frac{u_o}{u_i} = \frac{i_2 Z}{u_i} = \frac{D_{12} u_i}{D u_i} = \frac{j\omega MZ}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2 + Z) + \omega^2 M^2}. \end{aligned}$$

Pri určení výstupnej impedancie si problém zjednodušíme pomocou Théveninovej vety. Odpojíme záťaž Z . Uzol 1 (obr. 62) spojíme cez impedanciu Z_g zdroja s referenčným uzlom. Z impedančnej matice určíme

$$Z_o = \frac{D}{D_{22}} = \frac{(R_1 + j\omega L_1 + Z_g)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{R_1 + j\omega L_1 + Z_g} = R_2 + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega L_1 + Z_g}.$$

V praxi sa veľmi často musí brať do úvahy aj vlastný odpor cievok, teda namiesto impedancie $j\omega L$ treba počítať s $R + j\omega L$. Pri riešení obvodov s indukčnou väzbou metódou uzlových napätí pribudnú do obvodu ďalšie uzly (styky R a $j\omega L$), čo predstavuje ďalšie rovnice. Preto všade, kde je to možné, použijeme pri indukčtne viazaných obvodoch radšej metódu obvodových prúdov.

5 RIEŠENIE ELEKTRICKÝCH OBVODOV METÓDOU ORIENTOVANÝCH GRAFOV

Metóda orientovaných grafov umožňuje riešiť sústavu lineárnych rovníc bez mnohonásobného prepisovania determinantov pri ich úpravách a rozklade. Tým sa výpočet nielen zrýchli, ale navyše metóda poskytuje pekný prehľad o postupe signálu v obvode. Preto sa niekedy nazýva (celkom výstižne) metóda signálových tokov.

5.1 Základné pojmy

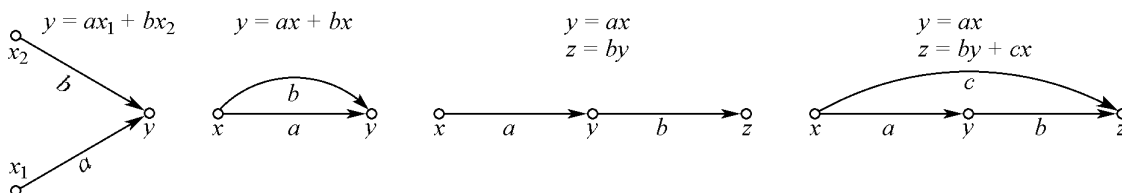
Zobrazíme si grafmi (obr. 63) rovnice

a) $y = ax_1 + bx_2$

c) $y = ax ; z = by$

b) $y = ax + bx$

d) $y = ax ; z = by + cx$

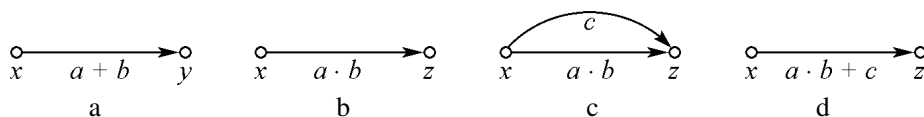


Obr. 63

Premenné veličiny zobrazíme krúžkami – *uzlami* – grafu, ktoré súčasne zobrazujú matematickú operáciu *sčítanie*. Orientovanými úsečkami – *vetvami* – grafu zobrazíme koeficienty rovníc a súčasne operáciu *násobenie*. Orientácia úsečky (šípka) je vždy od nezávisle premennej k závisle premennej. *Odtiaľ pochádza názov orientované grafy*.

V prípade elektrických obvodov budeme premenné zobrazené krúžkami nazývať **signály uzlov** a koeficienty zobrazené orientovanými úsečkami **prenosy vetiev**. Signál teda do uzla vstupuje vetvou vždy v smere šípky. Uzol, do ktorého žiadna vetva nevstupuje, zobrazuje nezávisle premennú. Jeho signál nezávisí od signálov ostatných uzlov, má iba vystupujúce vetvy a teda je obrazom zdroja. V grafoch na obr. 63 je v prípadoch b), c), d) obrazom zdroja uzol x . V prípade a) sú v grafe zobrazené dva zdroje x_1 a x_2 . Orientovaný graf elektrického obvodu vlastne zobrazuje tok signálu v tomto obvode.

Vráťme sa k obrázku 63b. Upravíme príslušnú rovnicu na $y = (a + b)x$. Graf je na obr. 64a. V tomto prípade hovoríme o paralelnom spojení vetiev.



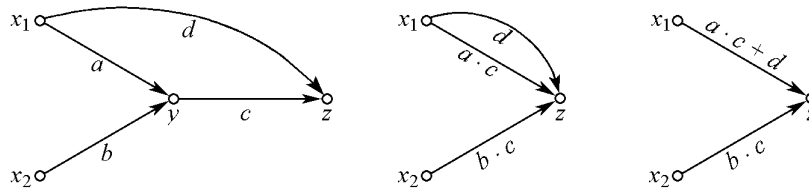
Obr. 64

V príklade rovníc označených c) dosadíme prvú z nich do druhej, čo poskytne výsledok $z = abx$. Vylúčili sme premennú y . Príslušný graf z obr. 63c ukazuje, že môžeme hovoriť o sériovom spojení vetiev. V upravenom tvare tohto grafu na obr. 64b sme vylúčili uzol y .

Rovnice d) upravujeme dosadením prvej do druhej – v grafe sme vylúčili uzol y (obr. 64c) – a konečná úprava dá $z = (ab + c)x$ s grafom na obr. 64d.

Postupnému riešeniu rovníc zodpovedá zjednodušovanie grafov – znižuje sa počet uzlov a vetiev až na konečný tvar dvoch uzlov a jedinej vetvy.

Vyriešime ešte jeden príklad. Rovniciam $y = ax_1 + bx_2$, $z = cy + dx_1$ zodpovedá graf na obr. 65a. Dosadíme prvú rovnicu do druhej (vylúčime premennú y). Dostaneme $z = acx_1 + bcx_2 + dx_1$; výsledku zodpovedá graf na obr. 65b. Poslednú rovnicu upravíme na tvar $z = (ac + d)x_1 + bcx_2$ a jej graf je na obr. 65c.



Obr. 65

Okamžite vidíme súvis medzi oboma úpravami. Pri zjednodušovaní grafov, ktoré zodpovedá postupnému riešeniu rovníc, teda môžeme využiť prvé dve pravidlá:

1. prenos sériového spojenia vetiev je rovný súčinu prenosov jednotlivých vetiev.
2. prenos paralelného spojenia vetiev je rovný súčtu prenosov jednotlivých vetiev.

Sériové spojenie všetkých vetiev medzi dvoma uzlami grafu tak, že žiadnym uzlom sa neprechádza viac ako raz, nazývame **cesta**. Napr. medzi uzlami z a x na obr. 65a sú dve cesty (vetva $x_1 \rightarrow z$ a vetva $x_1 \rightarrow y \rightarrow z$). Súčinu prenosov vetiev, ktoré tvoria cestu, budeme hovoriť **prenos cesty**. Môžeme teraz definovať aj **prenos grafu**, čo je pomer signálu vybraného (výstupného) uzla grafu k signálu vybraného zdroja. Napr. prenos grafu z obr. 65a zo zdroja x_1 je $z/x_1 = ac + d$, zo zdroja x_2 je $z/x_2 = bc$.

Zaujímavým a častým prípadom je **slučka grafu**. Budeme riešiť rovnice

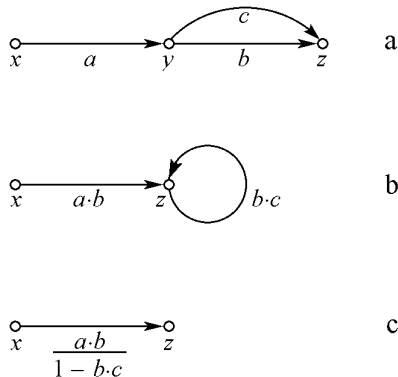
$$y = ax + cz$$

$$z = by$$

a kresliť k nim grafy (obr. 66a). Vylúčime premennú (z grafu uzol) y , teda dosadíme prvú rovnicu do druhej:

$$z = abx + bcz$$

(graf na obr. 66b).



Obr. 66

Vypočítame hodnotu z : $z = \frac{ab}{1 - bc} x$. Na grafoch z obr. 66 môžeme sledovať tok signálu: z uzla x postupuje do y , odtiaľ do uzla z a z neho sa vracia do uzla y . Vetvy b, c tvoria slučku, ktorej prenos je

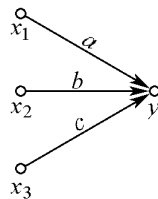
rovný súčinu prenosov vetiev slučky. Zreteľnejší je obraz slučky na obr. 66b. Slučka je teda uzavretá cesta späť do východzieho uzla, pričom žiadnym uzlom neprechádza viackrát.

Vráťme sa k obr. 66a. Z uzla x do uzla z vedie jediná cesta D (dráha) s prenosom $D = ab$. V grafe je jediná slučka S s prenosom $S = bc$. Prenos grafu so slučkou je (obr. 66c)

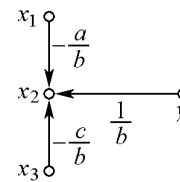
$$K = \frac{\text{prenos cesty}}{1 - \text{prenos slučky}} = \frac{D}{1 - S}$$

Tento vzorec je vlastne pravidlom pre zjednodušenie grafu so slučkou. Častokrát pri riešení elektrických obvodov treba zameniť nezávislé premenné (najmä u operačných zosilňovačov). Napr. na obr. 67 poznáme premenné x_1, x_3, y a potrebujeme určiť x_2 . Z grafu však vieme určiť iba y . Z rovníc, ktorým zodpovedá graf na obr. 67,

$$y = ax_1 + bx_2 + cx_3$$



Obr. 67



Obr. 68

vypočítame premennú x_2 :

$$x_2 = \frac{1}{b}y - \frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}x_3$$

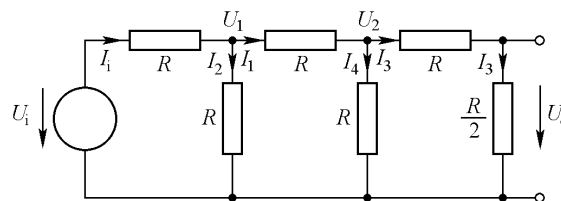
Graf tejto rovnice je na obr. 68. Vidíme, že vetva $x_2 \rightarrow y$ zmenila smer na opačný a jej prenos je prevrátenou hodnotou pôvodného. Vetvy, ktoré smerovali do pôvodne závislej premennej y , teraz smerujú do uzla novej závislej premennej x_2 , ich prenosy zmenili znamienko a veľkosť, a to s násobkom prenosu otočenej – *invertovanej* – vetvy. Takejto transformácii grafu budeme hovoriť **inverzia**. Vetvy a ich prenosy, ktoré vychádzajú z uzla podrobeného inverzii, sa touto transformáciou nemenia.

Uvedenými transformáciami možno zjednodušovať ľubovoľne zložitý graf až na jedinú vetvu, ktorej prenos je rovný prenosu grafu.

5.2 Orientované grafy elektrických obvodov

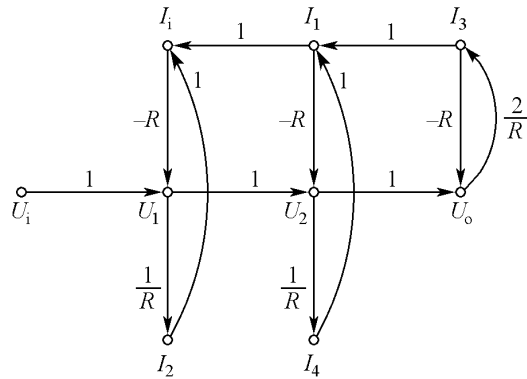
Budeme riešiť obvod z obr. 69. Použijeme Ohmov a Kirchhoffovo pravidlo pre prúdy. V obvode máme tri neznáme napätia a päť prúdov. Potrebujeme osem nezávislých rovníc:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_i - I_1 R & U_o &= U_2 - I_3 R & I_1 &= I_1 + I_2 & I_2 &= U_1 / R & I_4 &= U_2 / R \\ U_2 &= U_1 - I_1 R & & & I_1 &= I_3 + I_4 & I_3 &= 2U_o / R & & \end{aligned}$$



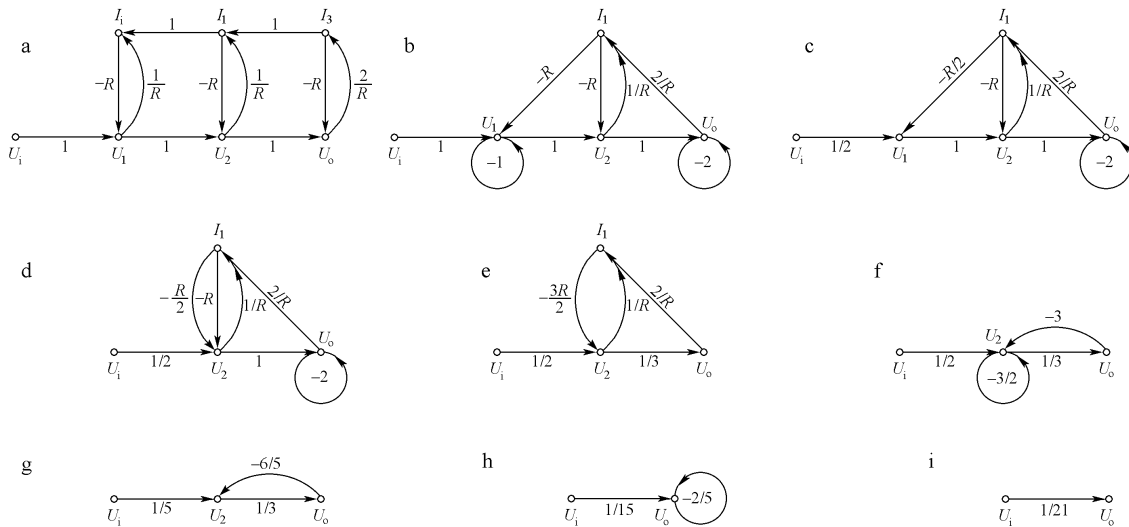
Obr. 69

Nakreslíme si graf tejto sústavy rovníc. Jednoznačná definícia postupu neexistuje. Topológia grafu bude závisieť od výtvarných schopností riešiteľa.



Obr. 70

Rozvrhneme si polohu uzlov a postupne rovnicu za rovnicou zakresľujeme vetvy a ich prenosy. Jeden z možných grafov je na obr. 70. Na ňom ukážeme postupy riešenia, ktoré potom zovšeobecníme. Jednotlivým bodom postupu zodpovedajú rovnakým písmenom označené obrázky. Ak budete súčasne riešiť sústavu zdrojových rovníc, zistíte súvis s postupným zjednodušovaním grafu.



Obr. 71

Vypočítame napäťový prenos $K_u = U_o/U_i$. V tomto prípade môžeme vylúčiť prúdy.

a) Najprv vylúčime prúdy I_2 a I_4 .

b) Vylúčime prúdy I_1 a I_3 . Prenos $I_1 \rightarrow U_1$ bude $1 \cdot (-R)$ a pri U_1 sa objaví slučka s prenosom $-R \cdot 1/R = -1$. Podobne prenos $U_o \rightarrow I_1$ je $1 \cdot 2/R = 2/R$ a pri U_o bude slučka s prenosom $-R \cdot 2/R = -2$.

c) Zbavíme sa slučky pri U_1 . Pretože je $U_1 = U_i - RI_1 - U_1$, tak $U_1 = (U_i - RI_1)/2$, alebo podľa pravidla prenosu grafu so slučkou je

$$U_1 = \frac{D}{1-S} = \frac{U_i - I_1 R}{1 - (-1)} = (U_i - I_1 R)/2$$

d) Odstránime uzol U_1 . Prenos $U_i \rightarrow U_2$ je $1 \cdot (1/2)$ a $I_1 \rightarrow U_2$ je $1 \cdot (-R/2) = -R/2$.

e) Použijeme pravidlo pre prenos paralelného spojenia vetiev pre $I_1 \rightarrow U_2$ a vylúčime slučku pri U_0 . Prenos $I_1 \rightarrow U_2$ je $-R/2 - R = -3R/2$ a pre $U_2 \rightarrow U_0$ bude $1/(1+2) = 1/3$.

f) Eliminujeme uzol I_1 . Prenos $U_0 \rightarrow U_2$ je $(2/R) \cdot (-3R/2) = -3$ a slučky pri U_2 je $(-3R/2) \cdot (1/R) = -3/2$.

g) Určíme prenosy do U_2 pri vypustení slučky. Pre $U_i \rightarrow U_2$ je prenos

$$\frac{D}{1-S} = \frac{1/2}{1-(-3/2)} = \frac{1}{5} \quad \text{a pre } U_0 \rightarrow U_2 \text{ je} \quad \frac{-3}{1-(-3/2)} = -\frac{6}{5}.$$

h) Vypustíme uzol U_2 , takže prenos $U_i \rightarrow U_0$ bude $(1/5) \cdot (1/3) = 1/15$ a pri U_0 zostane slučka s prenosom $(-6/5) \cdot (1/3) = -2/5$.

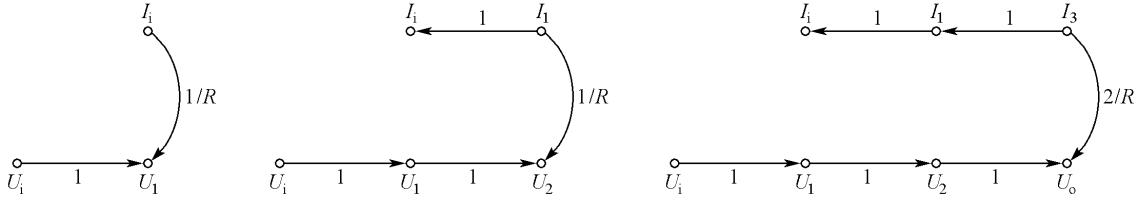
i) Pravidlo pre prenos grafu so slučkou poskytne výsledok prenosu $U_i \rightarrow U_0$

$$\frac{D}{1-S} = \frac{1/15}{1-(-2/5)} = \frac{5/15}{7} = \frac{1}{21}.$$

5.3 Masonovo pravidlo

Aby sme našli rýchlejší postup na určenie prenosu grafu, budeme najprv analyzovať jeho topologickú štruktúru.

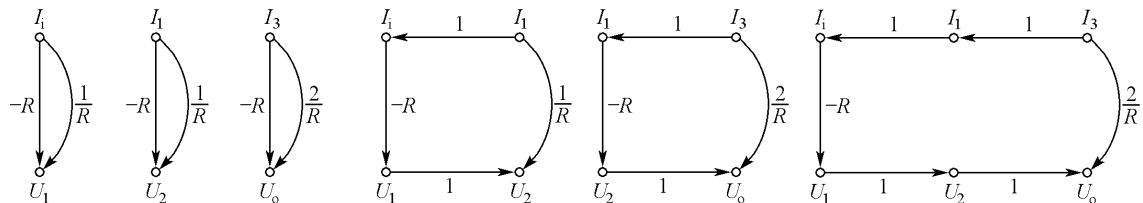
Do uzla U_0 z uzla U_i v grafe na obr. 71a vedie jediná cesta $U_i \rightarrow U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow U_0$. Iná situácia nastane, ak sa zaujímate napr. o vstupný odpor (obvod z obr. 69). Potrebujeme zistiť prenos $U_i \rightarrow I_i$. Dôkladnou prehliadkou grafu z obr. 71a zistíme, že signál môže postupovať tromi cestami (obr. 72):



Obr. 72

Pripomíname, že cesta je spojenie vybraného vstupného a vybraného výstupného uzla vetvami tak, že každým uzlom prechádza iba raz.

Veľmi dôležitú úlohu majú slučky grafu. Vyhľadáme všetky možné slučky na obrázku 71a. Nájďme ich šesť (obr. 73):



Obr. 73

Porovnaním zistíme, že niektoré slučky nemajú žiaden spoločný uzol, iné majú spoločné dva alebo aj viac uzlov. Podobne je to so vzájomnou polohou slučiek a ciest. Ak dve alebo viac slučiek nemá ani jeden spoločný bod, hovoríme, že slučky sa *nedotýkajú*. Podobne budeme hovoriť, že *slučka sa nedotýka cesty*, ak *slučka a cesta nebudú mať žiadny spoločný uzol*.

Navzájom sa nedotýkajúce slučky grafu z obr. 71a sú:

dvojice: $S1 \rightarrow S2, S1 \rightarrow S3, S1 \rightarrow S5, S2 \rightarrow S3, S3 \rightarrow S4$,
 trojice: $S1 \rightarrow S2 \rightarrow S3$.

Cesty a slučky, ktoré sa nedotýkajú, sú (obr. 72, 73):

$D1 \rightarrow S2, D1 \rightarrow S3, D1 \rightarrow S5, D2 \rightarrow S3$.

Tieto navzájom sa nedotýkajúce slučky a cesty dovoľujú určiť prenos grafu bez jeho zdĺhavých zjednodušujúcich transformácií. Obdobou Cramerovho pravidla, ktoré sme použili v maticovej metóde, je v metóde orientovaných grafov Masonovo pravidlo.

Podľa Masonovho pravidla je K prenos grafu medzi vstupným x a výstupným y uzlom rovný

$$K = \frac{y}{x} = \frac{D1 \left(1 - \sum_i S_i^1 + \sum_{i,j} S_i^1 S_j^1 - \dots \right) + D2 \left(1 - \sum_i S_i^2 + \sum_{i,j} S_i^2 S_j^2 - \dots \right) + \dots}{1 - \sum_i S_i + \sum_{i,j} S_i S_j - \sum_{i,j,k} S_i S_j S_k + \dots}$$

kde: $\sum_i S_i$ je súčet prenosov všetkých slučiek grafu

$\sum_{i,j} S_i S_j$ je súčet súčinov prenosov všetkých dvojíc vzájomne sa nedotýkajúcich slučiek grafu

$\sum_{i,j,k} S_i S_j S_k$ je súčet súčinov prenosov všetkých trojíc vzájomne sa nedotýkajúcich slučiek grafu

$D1, D2, \dots$ sú prenosy všetkých možných ciest v grafe zo vstupného do výstupného uzla

$\sum_i S_i^n$ je súčet prenosov všetkých slučiek grafu, ktoré sa nedotýkajú cesty Dn

$\sum_{i,j} S_i^n S_j^n$ súčet súčinov prenosov dvojíc vzájomne sa nedotýkajúcich slučiek grafu, ktoré sa súčasne nedotýkajú cesty Dn

Dôkaz správnosti Masonovho pravidla možno nájsť v [6].

Použijeme teraz Masonovo pravidlo na graf z obr. 71a obvodu z obr. 69. Najprv vypočítame napät'ový prenos $K_u = U_o/U_i$. Z uzla U_o do U_i jestvuje jediná prenosová cesta s prenosom $D1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Všetky slučky sa tejto prenosovej cesty dotýkajú, takže čitateľ v Masonovom vzťahu bude rovný 1. Menovateľ bude obsahovať dvanásť členov, pretože v grafe je šesť slučiek, päť dvojíc a jedna trojica vzájomne sa nedotýkajúcich slučiek. Takže menovateľ D bude:

$$D = 1 - S1 - S2 - S3 - S4 - S5 - S6 + S1S2 + S1S3 + S1S5 + S2S3 + S3S4 - S1S2S3 = \\ = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + = 21 .$$

Napät'ový prenos je: $K_u = \frac{U_o}{U_i} = \frac{D}{\Delta} = \frac{1}{21}$.

Ďalej vypočítame vstupnú vodivosť obvodu $G_i = I_i/U_i$: Z uzla U_i do I_i vedú tri cesty, pričom jestvujú aj slučky, ktoré sa týchto ciest nedotýkajú. Čitateľ Masonovho vzťahu bude:

$$D1(1 - S1 - S3 - S5 + S2S3) + D2(1 - S3) + D3 = \frac{1}{R} (1 + 1 + 2 + 2 + 2) + \frac{1}{R} (1 + 2) + \frac{2}{R} = \frac{13}{R} .$$

Menovateľ a už poznáme, je to $\Delta = 21$. Takže vstupná vodivosť obvodu je:

$$G_i = \frac{I_i}{U_i} = \frac{13}{23R} \quad \text{a vstupný odpor} \quad R_i = \frac{1}{G_i} = \frac{21}{13} R .$$

5.4 Orientované grafy a metóda uzlových potenciálov

Podobne, ako sme pri maticových metódach našli postupy, pomocou ktorých sme matice obvodu zostavovali priamo zo schémy obvodu, budeme hľadať takéto postupy aj v metóde orientovaných grafov.

Keďže aj metóda orientovaných grafov slúži na riešenie sústavy lineárnych algebraických rovníc, použijeme na rovnice opisujúce obvod niektorú z operátorových metód. V tejto časti skrípt budeme používať Laplaceovu transformáciu.

Na obr. 74 je časť obvodu s niekoľkými uzlami. Použijeme Ohmov zákon a určíme jednotlivé prúdy, ktoré vtekajú do uzlov i a j .

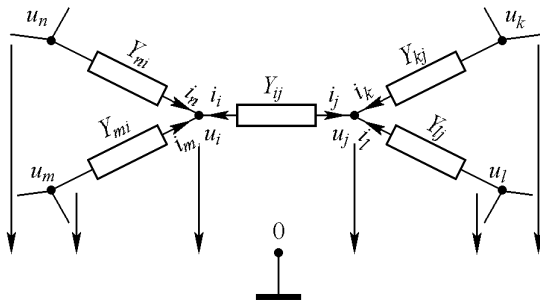
$$\begin{aligned} i_n &= (u_n - u_i)Y_{ni} & i_k &= (u_k - u_j)Y_{kj} \\ i_m &= (u_m - u_i)Y_{mi} & i_l &= (u_l - u_j)Y_{lj} \\ i_i &= (u_j - u_i)Y_{ji} & i_i &= (u_i - u_j)Y_{ij} \end{aligned}$$

Admitancie sú parametre prvkov obvodu, ich hodnota od smeru nezávisí, preto $Y_{ab} = Y_{ba}$. Použijeme na prúdy tečúce do uzlov i a j Kirchhoffovo pravidlo pre prúdy. Za prúdy dosadíme výrazy z predchádzajúcich rovníc a upravíme:

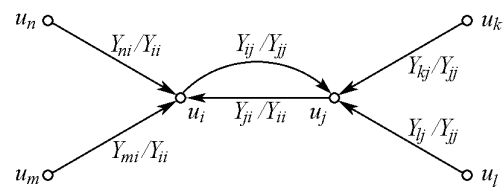
$$\begin{aligned} i: \quad & u_j Y_{ji} + u_m Y_{mi} + u_n Y_{ni} = (Y_{ji} + Y_{mi} + Y_{ni})u_i = Y_{ii}u_i \\ j: \quad & u_i Y_{ij} + u_k Y_{kj} + u_l Y_{lj} = (Y_{ij} + Y_{kj} + Y_{lj})u_j = Y_{jj}u_j \end{aligned}$$

Výrazy $Y_{ii} = Y_{ji} + Y_{mi} + Y_{ni}$ a $Y_{jj} = Y_{ij} + Y_{kj} + Y_{lj}$ predstavujú súčet všetkých admitancií pripojených do uzla i resp. j a nazveme ich **vlastné admitancie uzlov** i a j . Z rovníc si vyjadríme premenné u_i a u_j :

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{Y_{ji}}{Y_{ii}} u_j + \frac{Y_{mi}}{Y_{ii}} u_m + \frac{Y_{ni}}{Y_{ii}} u_n \\ u_j &= \frac{Y_{ij}}{Y_{jj}} u_i + \frac{Y_{kj}}{Y_{jj}} u_k + \frac{Y_{lj}}{Y_{jj}} u_l \end{aligned}$$



Obr. 74

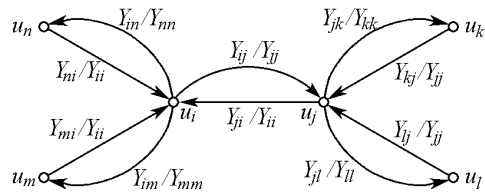


Obr. 75

Graf týchto rovníc je na obr. 75.

Pravidlo na zostavenie grafu je jednoduché: vetvy obvodu s admitanciou Y_{ij} ($= Y_{ji}$) zodpovedá v grafe vetva vychádzajúca z uzla i a vstupujúca do uzla j s prenosom Y_{ij}/Y_{jj} (podiel admitancie vetvy obvodu a vlastnej admitancie uzla, do ktorého vstupuje). Súčasne z uzla j vystupuje vetva s prenosom Y_{ji}/Y_{ii} a vstupuje do uzla i .

Podobne ako pri uzloch i a j postupujeme pri všetkých uzloch obvodu, takže výsledný graf obvodu z obr. 74 je na obr. 76.

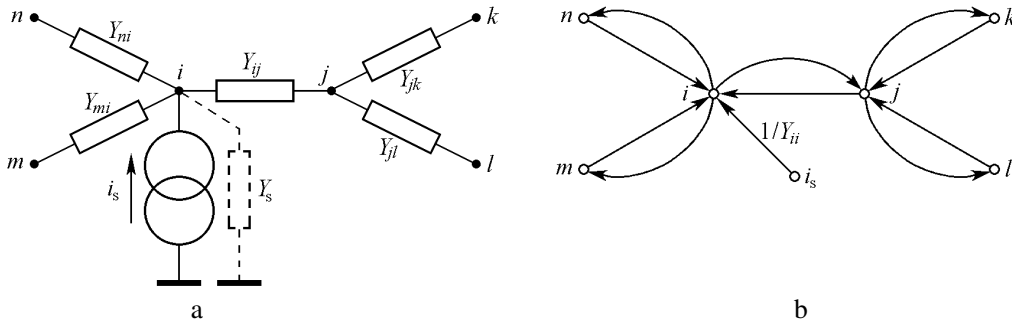


Obr. 76

Grafy budú vyzerat' trochu inak, ak sa v obvodoch vyskytujú zdroje. Na obr. 77a je medzi uzol i a referenčný uzol pripojený ideálny zdroj prúdu ($Y_s = 0$). Do rovnice pre uzol i zostavenej podľa Kirchhoffovho pravidla pre prúdy pribudne ešte sčítanec i_s . Po úprave tejto novej rovnice sa zmení vzťah pre u_i :

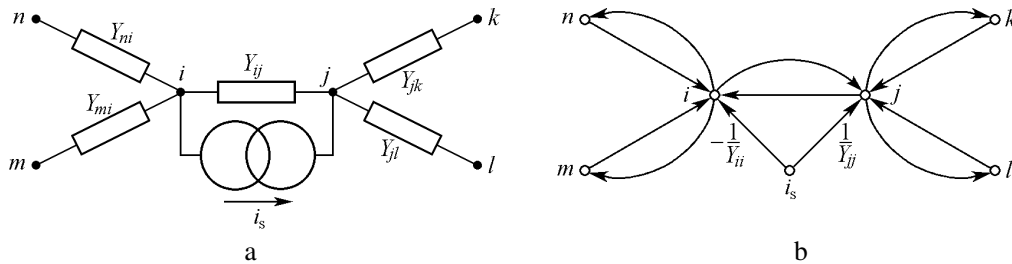
$$u_i = \frac{Y_{ji}}{Y_{ii}} u_j + \frac{Y_{mi}}{Y_{ii}} u_m + \frac{Y_{ni}}{Y_{ii}} u_n + \frac{1}{Y_{ii}} i_s,$$

teda do pôvodného grafu z obr. 76 treba nakresliť uzol pre novú premennú i_s (obr. 77b), z ktorého do uzla i vedie vetva s prenosom $1/Y_{ii}$. Ostatné vetvy a ich prenosi zostanú nezmenené.



Obr. 77

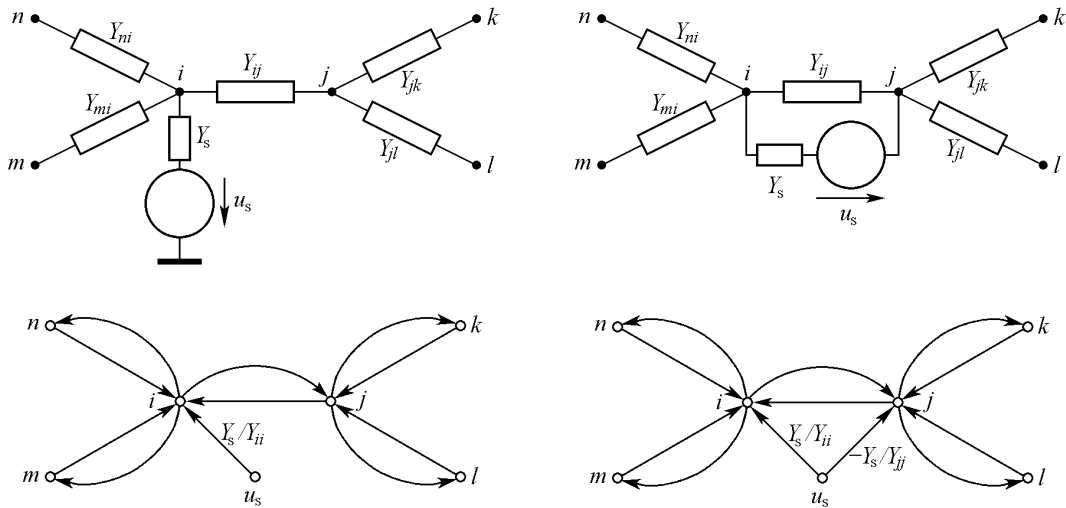
Ak bude zdroj prúdu i_s reálny, bude mať jeho vnútorná admitancia konečnú nenulovú hodnotu Y_s . Graf takéhoto obvodu je rovnaký ako na obr. 77b, iba vlastná vodivosť uzla i sa zväčší od hodnoty Y_s .



Obr. 78

Keď bude ideálny zdroj prúdu pripojený medzi uzly i a j , tak do rovníc, zostavených podľa Kirchhoffovho pravidla pre prúdy pre tieto uzly, pristúpia ďalšie sčítance; pre uzol i : $-i_s$, pre uzol j : i_s . Znamienko je určené smerom prúdu i_s : z uzla i vystupuje, do uzla j vstupuje. V grafe teda pribudne zase uzol pre premennú i_s a prenosi vetiev, ktoré z neho vystupujú, budú rovné vlastným impedanciám uzlov i a j so znamienkom podľa smeru prúdu i_s . V prípade, že zdroj prúdu i_s bude reálny, tak jeho vnútorná admitancia Y_s zväčší admitanciu Y_{ij} a vlastné admitancie uzlov i a j . Inak tvar grafu a prenosi ostatných vetiev (obr. 78b) sú rovnaké ako v pôvodnom obvode bez zdroja.

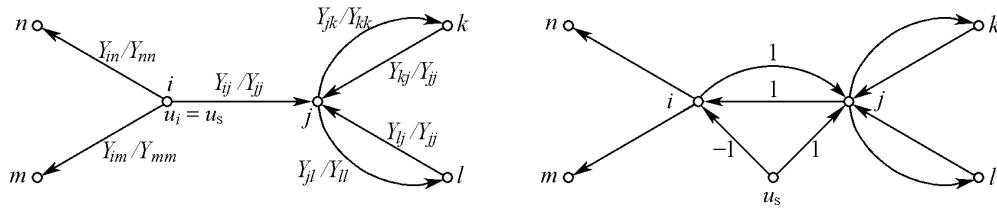
Reálny zdroj napätia pripojený do uzla i a druhou svorkou do referenčného uzla (obr. 79a) alebo medzi uzly i a j tiež nezmení veľmi graf obvodu. Reálny zdroj napätia môžeme plne nahradiť reálnym zdrojom prúdu (obr. 4 na str. 11) s prúdom $i_s = u_s Y_s$, a tým dostaneme obvody z obr. 77a a 78a. V grafoch teda bude vystupovať nový uzol premennej u_s a vetvy s prenosmi Y_s/Y_{ii} a Y_s/Y_{ij} .



Obr. 79

Ak je do uzla i pripojený ideálny zdroj napätia, ktorého $Y_s \rightarrow \infty$, vlastná admittance uzla i je $Y_{ii} \rightarrow \infty$; preto vetvy vstupujúce do uzla i budú mať nulový prenos (nemusíme ich kresliť!) a signál uzla i bude rovný napätiu zdroja ($u_i = u_s$). Graf obvodu je na obr. 80a.

Úplne iná situácia nastane, ak je pripojený ideálny zdroj napätia medzi uzly i a j . Bežným spôsobom zostavený graf je na obr. 80b, ale veľmi rýchlo zistíme, že nevieme určiť prenos napr. z uzla j do i (prenos diverguje $\rightarrow 1/0$). Treba použiť iný postup.

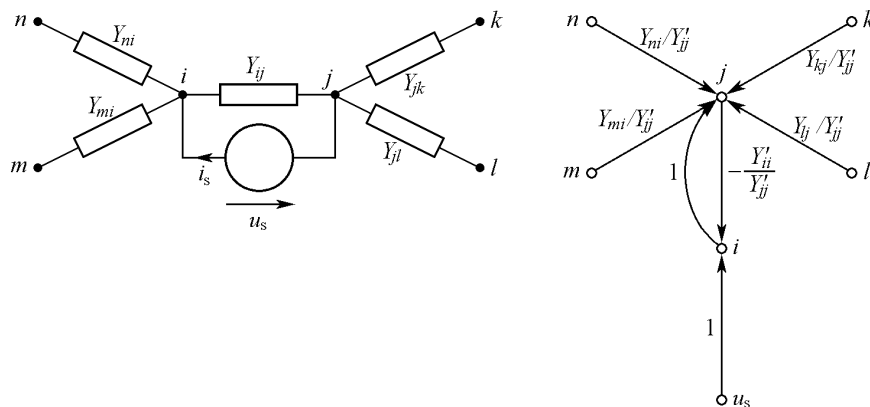


Obr. 80

Napíšeme podľa Kirchhoffovho pravidla pre prúdy rovnice pre súčet prúdov v uzloch i a j (obr. 81a):

$$i: (u_m - u_i)Y_{mi} + (u_n - u_i)Y_{ni} + (u_j - u_i)Y_{ji} + i_s = 0,$$

$$j: (u_k - u_j)Y_{kj} + (u_l - u_j)Y_{lj} + (u_i - u_j)Y_{ij} - i_s = 0.$$



Obr. 81

Pretože zdroj u_s je ideálny zdroj napätia, je $u_i = u_j + u_s$.

Sčítame obe rovnice a upravíme na tvar:

$$u_k Y_{kj} + u_l Y_{lj} + u_m Y_{mj} + u_n Y_{nj} - u_i Y'_{ij} = u_j Y'_{jj},$$

kde $Y'_{ii} = Y_{mi} + Y_{ni} = Y_{ii} - Y_{ij}$ a $Y'_{jj} = Y_{kj} + Y_{lj} = Y_{jj} - Y_{ij}$ sú vlastné admitancie uzlov i a j zmenšené o vzájomnú admitanciu Y_{ij} . Tú sme mohli z našich úvah vypustiť hneď na začiatku, pretože iba prúdovo zaťažuje ideálny zdroj napätia u_s , ale inak nemá žiadny vplyv na rozdelenie napätí v obvode.

Vypočítame napätie u_j :

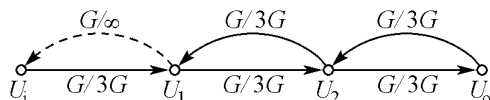
$$u_j = \frac{Y_{kj}}{Y'_{jj}} u_k + \frac{Y_{lj}}{Y'_{jj}} u_l + \frac{Y_{mj}}{Y'_{jj}} u_m + \frac{Y_{nj}}{Y'_{jj}} u_n - \frac{Y'_{ii}}{Y'_{jj}} u_i.$$

Táto rovnica spolu so vzťahom $u_i = u_j + u_s$ má graf na obr. 81b; z neho môžeme určiť akýkoľvek z prenosov.

Príklad 38. Použijeme metódu uzlových napätí, zostavíme orientovaný graf obvodu z obr. 69 a použitím Masonovho pravidla určíme prenos $K_u = U_o/U_i$, vstupný a výstupný odpor.

V obvode je na prvý pohľad vidno tri uzly. K nim pribudne štvrtý – spojenie zdroja a odporu R . Nakreslíme štyri krúžky – premenné U_i, U_1, U_2, U_o – prikreslíme orientované úsečky spájajúce uzly a ku každej vetve grafu pripíšeme jej prenos (obr. 82).

Uzol, do ktorého je pripojený zdroj, má nekonečne veľkú vlastnú admitanciu, pretože vnútorný odpor zdroja je nulový. Vetva, ktorá vchádza na grafe do uzla U_i má prenos nulový, preto ju netreba kresliť. Ostatné vetvy majú prenos $1/3$.



Obr. 82

Určíme najprv napät'ový prenos. Z uzla U_i do uzla U_o vedie jediná cesta s prenosom

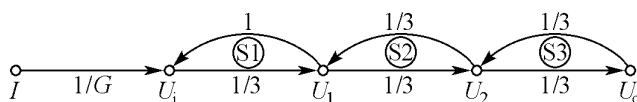
$$D1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

V grafe sú iba dve slučky a obe sa dotýkajú prenosovej cesty i navzájom. Podľa Masonovho pravidla je

$$K_u = \frac{D1}{1 - S1 - S2} = \frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}} = \frac{1}{21}.$$

Keď porovnáme výsledok a námahu s postupným zjednodušovaním grafu alebo s maticovou metódou (museli by sme počítat' dva determinanty tretieho stupňa), sú výhody uvedeného postupu zrejme.

Vypočítame teraz vstupný odpor. V grafe nemáme žiadnu premennú, ktorá by bola zobrazením prúdu. Pomôžeme si tak, že odpojíme zdroj napätia a pripojíme ideálny zdroj prúdu. Vypočítame (v praxi zmeriame) napätie na vstupe a tým máme všetky údaje potrebné na určenie vstupného odporu. Nakreslíme graf upraveného obvodu (obr. 83).



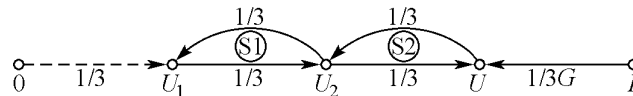
Obr. 83

Napätie na vstupe obvodu sa zmení z U_i na U . Prenos vetvy z uzla I do uzla U je rovný vlastnej impedancii uzla, do ktorého vetva vchádza, teda uzla U . Sem je pripojený iba odpor R (vodivosť G), lebo vodivosť ideálneho zdroja prúdu je nulová. V porovnaní s grafom na obr. 82 pribudne aj pôvodne čiarkovaná vetva z uzla U_1 do uzla U , pretože vlastná vodivosť uzla U má už konečnú hodnotu. Prenos tejto vetvy je jednotka. Prenosová cesta z I do U je jedna, ale v grafe sú dve slučky, ktoré sa jej nedotýkajú (S_2, S_3). Prenos z I do U , teda vstupný odpor je:

$$R_i = \frac{U}{I} = \frac{D1(1-S1-S2)}{1-S1-S2-S3+S1S3} = \frac{\frac{1}{G}\left(1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)}{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}} = \frac{21}{13}R.$$

Výstupný odpor určíme podobne. V duchu Théveninovej vety ideálny zdroj napätia (obr. 69) nahradíme skratom, na výstup pripojíme ideálny zdroj prúdu, určíme napät'ovú odozvu. Pretože sme zdroj U_i skratovali, vetva z U_i do U_1 vypadne, lebo $U_i = 0$ neprispieva ničím k napätiu U_1 . Z uzla I vedie do U jediná vetva a tej sa nedotýka slučka $S1$ (obr. 84). Prenos z I do U , teda výstupný odpor je

$$R_o = \frac{U}{I} = \frac{\frac{1}{3G}\left(1-\frac{1}{9}\right)}{1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}} = \frac{8}{21}R.$$

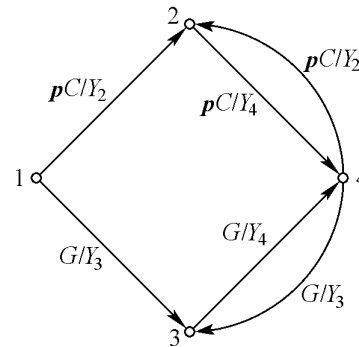
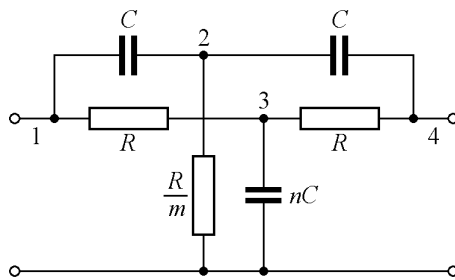


Obr. 84

Príklad 39. Určíme dvojbánové parametre dvojitého T obvodu z obr. 85a.

Na vstup (uzol 1) pripojíme ideálny zdroj napätia. Vlastné admitancie uzlov budeme pre jednoduchosť označovať Y s indexom rovným poradovému číslu uzla. Graf obvodu je na obr. 85b.

Prenos napätia $K_u = U_4/U_1$ sa deje dvoma cestami. V grafe sú dve slučky, ktoré sa dotýkajú oboch ciest, preto



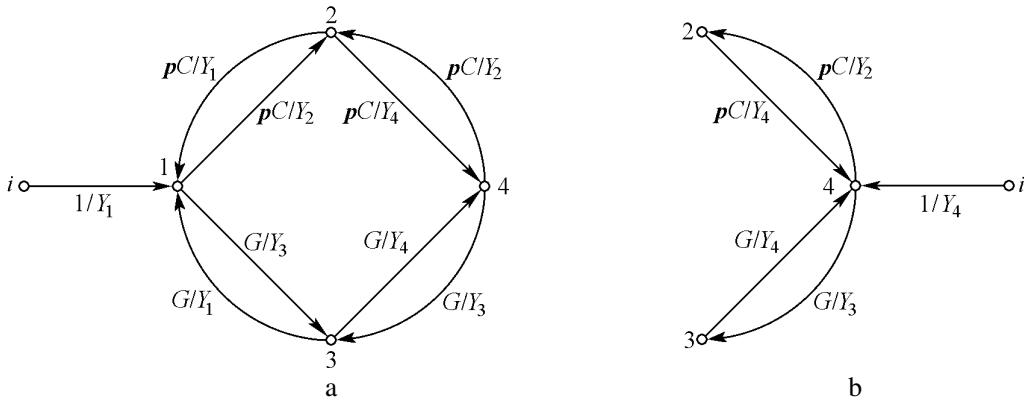
Obr. 85

$$K_u = \frac{U_4}{U_1} = \frac{\frac{pC}{Y_2} \frac{pC}{Y_4} + \frac{G}{Y_3} \frac{G}{Y_4}}{1 - \frac{pC}{Y_4} \frac{pC}{Y_2} - \frac{G}{Y_4} \frac{G}{Y_3}} = \frac{p^2 C^2 Y_2 + G^2 Y_2}{Y_2 Y_3 Y_4 - p^2 C^2 Y_3 - G^2 Y_2}, \quad \text{kde} \quad \begin{cases} Y_2 = 2pC + mG \\ Y_3 = npC + 2G \\ Y_4 = pC + G \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
K_u &= \frac{p^2 C^2 (npC + 2G) + G^2 (2pC + mG)}{(2pC + mG)(npC + 2G)(pC + G) - p^2 C^2 (npC + 2G) - G^2 (2pC + mG)} = \\
&= \frac{np^3 C^3 + 2p^2 C^2 G + 2pCG^2 + mG^3}{np^3 C^3 + (2n + mn + 2)p^2 C^2 G + (2m + mn + 2)pCG^2 + mG^3} = \\
&= \frac{nP^3 + 2P^2 + 2P + m}{nP^3 + (2n + mn + 2)P^2 + (2m + mn + 2)P + m}
\end{aligned}$$

kde $P = pCR$ je normovaný kmitočet.

Vstupnú a výstupnú impedanciu určíme už známym postupom, pripájaním ideálneho zdroja prúdu a určením napäťovej odozvy. Príslušné grafy sú na obr. 86. Obvod z obr. 85 je symetrický, preto je $Y_1 = Y_4$. V grafe na obr. 86a je šesť slučiek (121, 242, 131, 343, 12431, 13421), dve dvojice navzájom sa nedotýkajúcich slučiek (121 a 343, 131 a 242) a dve slučky sa nedotýkajú prenosovej cesty $i \rightarrow 1$ (242 a 343).



Obr. 86

$$\begin{aligned}
R_i &= \frac{u_1}{i} = \frac{1}{Y_1} \frac{1 - \frac{pC}{Y_4} \frac{pC}{Y_2} - \frac{G}{Y_4} \frac{G}{Y_3}}{1 - \frac{pC}{Y_2} \frac{pC}{Y_1} - \frac{pC}{Y_4} \frac{pC}{Y_2} - \frac{G}{Y_3} \frac{G}{Y_1} - \frac{G}{Y_4} \frac{G}{Y_3} + 2 \frac{pC}{Y_2} \frac{pC}{Y_4} \frac{G}{Y_3} \frac{G}{Y_1} - 2 \frac{pC}{Y_1} \frac{pC}{Y_2} \frac{G}{Y_3} \frac{G}{Y_4}} = \\
&= \frac{Y_1 Y_2 Y_3 - p^2 C^2 Y_2 - G^2 Y_2}{Y_1 (Y_1 Y_2 Y_3 - 2 p^2 C^2 Y_3 - 2 G^2 Y_2)} = \frac{R n P^3 + (2n + mn + 2) P^2 + (2m + mn + 2) P + m}{P (2n + mn) P^2 + 2(m + n + mn) P + (2m + mn)}
\end{aligned}$$

Výstupnú impedanciu určíme z grafu na obr. 86b.

$$\begin{aligned}
R_o &= \frac{u_4}{i} = \frac{1/Y_4}{1 - \frac{pC}{Y_2} \frac{pC}{Y_4} - \frac{G}{Y_3} \frac{G}{Y_4}} = \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 Y_2 Y_3 - p^2 C^2 Y_3 - G^2 Y_2} = \\
&= \frac{2n P^2 + (mn + 4) P + 2m}{nP^3 + (2n + mn + 2) P^2 + (2n + mn + 2) P + m}
\end{aligned}$$

V praxi sa najčastejšie stretáme s týmto obvodom v úprave, keď $m = n = 2$.

$$K_u = \frac{P^3 + P^2 + P + 1}{P^3 + 5P^2 + 5P + 1}; R_o = 2R \frac{P^2 + P + 1}{P^3 + 5P^2 + 5P + 1}; R_i = \frac{R}{4P} \frac{P^3 + 5P^2 + 5P + 1}{P^2 + P + 1}.$$

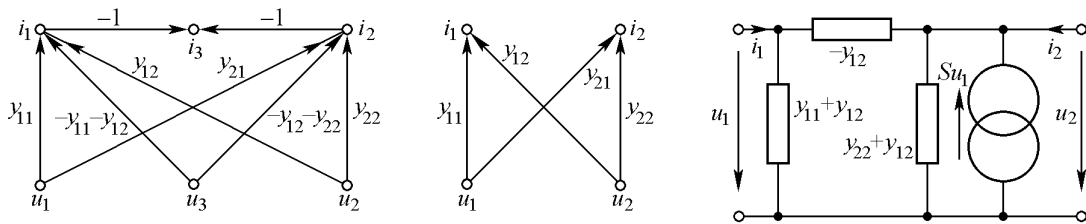
Korene čitateľa prenosu K_u sú $P_1 = -1$, $P_{2,3} = \pm\sqrt{-1}$. Ani jeden z týchto koreňov nemá reálnu časť kladnú. Obvod, ktorého nuly prenosovej funkcie (t. j. také p_0 , pre ktoré je $K(p_0) = 0$) neležia v pravej

polrovine Gaussovej roviny, sa nazýva **obvod s minimálnou fázou**. Pre tieto obvody dokázal Bode, že je **jednoznačný vzťah medzi amplitúdovou a fázovou charakteristikou**. Stačí poznať jednu a druhú z nej vieme určiť. Dvojitý T pre $m = n = 2$ je práve na hranici „minimálna – neminimálna“ fáza. Pre $m = n > 2$ ide o obvod s neminimálnou fázou.

5.4.1 Obvody s aktívnymi prvkami

Aktívne prvky môžeme považovať za trojbody, ktoré sú opísané sústavou troch závislých rovníc. Ich graf je na obr. 87a.

Veľmi často býva jeden uzol aktívneho prvku spoločný vstupu a výstupu obvodu, do ktorého je trojbod zapojený a navyše je spojený s referenčným uzlom. Bez ujmy na všeobecnosti to môže byť uzol 3 (ak nie, tak uzly prečíslujeme), takže napätie $u_3 = 0$ aj prúd $i_3 = i_1 + i_2$ môžeme z ďalších úvah vypustiť. Tým sa zjednoduší aj graf (pozri obr. 87b). Všeobecná náhradná schéma linearizovaného aktívneho prvku (trojvodu) je na obr. 87c.



Obr. 87

Na opis trojvodu stačia štyri parametre:

$y_i = y_{11} + y_{12}$	vstupná admitancia
$y_o = y_{22} + y_{12}$	výstupná admitancia
$S = y_{21} - y_{12}$	strmosť
$y_{oi} = -y_{12}$	prenosová admitancia

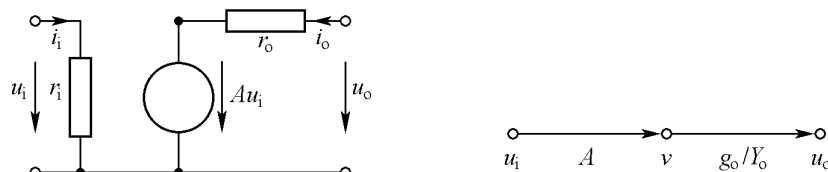
Z toho y_i , y_o , y_{oi} sú *dvojbránové parametre* a S charakterizuje neautonómny (závislý, parametrický) zdroj.

5.4.2 Obvody so zosilňovačom

Zosilňovač je najčastejšie opísovaný týmito parametrami:

$y_i = g_i = 1/r_i$	vstupná vodivosť
$y_o = g_o = 1/g_o$	výstupná vodivosť
$A = S/g_o = Sr_o$	napät'ové zosilnenie naprázdno

Prenosová admitancia je $y_{oi} = 0$. Náhradná schéma zosilňovača a základný graf sú na obr. 88.



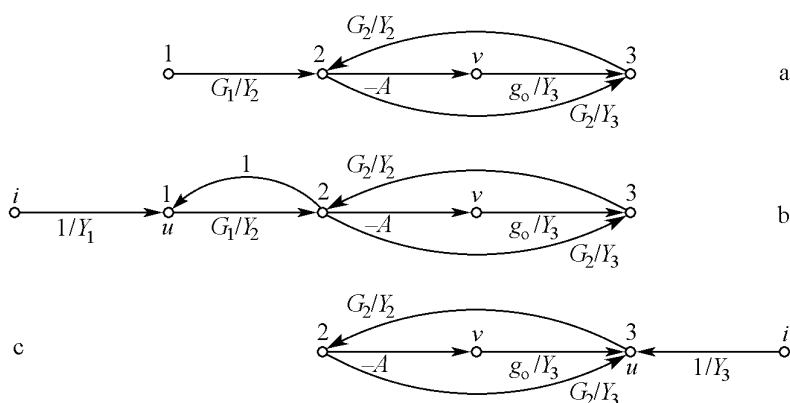
Obr. 88

Príklad 40. Vyriešme znovu príklad 32, ale metódou orientovaných grafov. Graf obvodu z obr. 52 je na obr. 89a.

Prenosové cesty z uzla 1 (u_i) do uzla 3 (u_o) sú dve $D1 = 12v3$, $D2 = 123$. V grafe sú dve slučky $S1 = 2v32$, $S2 = 232$ a obe sa dotýkajú oboch prenosových ciest. Použijeme Masonov vzťah:

$$K_u = \frac{u_o}{u_i} = \frac{D1 + D2}{1 - S1 - S2} = \frac{\frac{G_1}{Y_2} \left[(-1) \frac{g_o}{Y_3} + \frac{G_2}{Y_3} \right]}{1 - (-A) \frac{g_o}{Y_3} \frac{G_2}{Y_2} - \frac{G_2}{Y_3} \frac{G_2}{Y_2}} = \frac{G_1(G_2 - Ag_o)}{(G_1 + G_2 + g_i)(G_2 + g_o) - G_2^2 + Ag_o G_2} =$$

$$= \frac{-Ag_o G_1}{-Ag_o G_2} \frac{1 - G_2/Ag_o}{1 + \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \left(\frac{G_1}{G_2} + \frac{g_i}{G_2} \right) \left(1 + \frac{G_2}{g_o} \right)} \approx \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{A} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)}$$



Obr. 89

Vstupnú impedanciu určíme už známym postupom. Graf upraveného obvodu je na obr. 89b. V grafe pribudla slučka $S3 = 121$.

$$Z_i = \frac{u}{i} = \frac{1}{Y_1} \frac{(1 - S1 - S2)}{1 - S1 - S2 - S3} = \frac{1}{Y_1} \frac{1 - (-A) \frac{g_o}{Y_3} \frac{G_2}{Y_2} - \frac{G_2}{Y_3} \frac{G_2}{Y_2}}{1 - (-A) \frac{g_o}{Y_3} \frac{G_2}{Y_2} - \frac{G_2}{Y_3} \frac{G_2}{Y_2} - \frac{G_1}{Y_2}} = \frac{1}{Y_1} \frac{Y_2 Y_3 - G_2^2 + Ag_o G_2}{Y_2 Y_3 - G_2^2 + Ag_o G_2 - G_1 Y_2} =$$

$$= R_1 \frac{(G_1 + G_2 + g_i)(G_2 + g_o) - G_2^2 + Ag_o G_2}{(G_1 + G_2 + g_i)(G_2 + g_o) - G_2^2 + Ag_o G_2 - G_1(G_2 + g_o)} =$$

$$= R_1 \frac{(G_1 + g_i)(G_2 + g_o) + (A+1)g_o G_2}{g_i(G_2 + g_o) + (A+1)g_o G_2} \approx R_1 \frac{R_2 + r_o}{A+1}$$

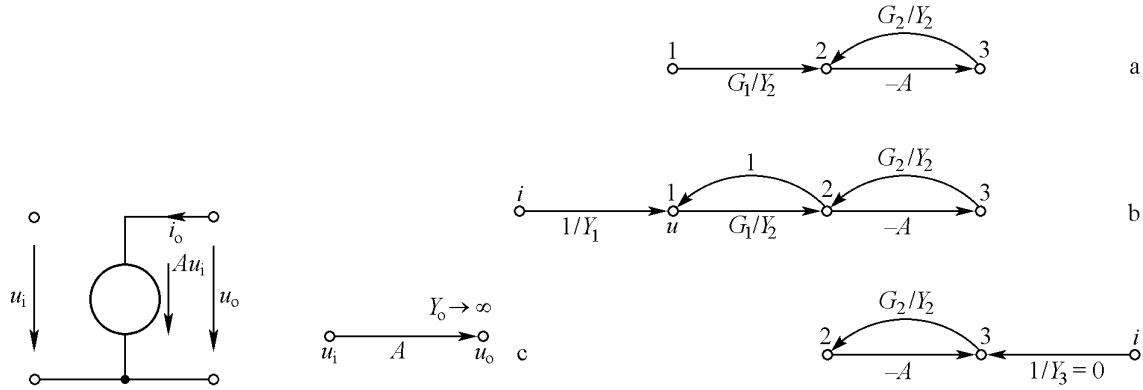
Podobne vypočítame výstupnú impedanciu z grafu na obr. 89c.

$$Z_o = \frac{u}{i} = \frac{1}{Y_3} \frac{1}{1 - S1 - S2} = \frac{Y_2}{Y_2 Y_3 - G_2^2 + Ag_o G_2} = R_1 \frac{G_1 + G_2 + g_i}{(G_1 + g_i)(G_2 + g_o) + (A+1)g_o G_2} \approx$$

$$\approx r_o \frac{1 + R_2/R_1}{A}$$

5.4.3 Ideálny zosilňovač

Ideálny zosilňovač je popísaný jediným parametrom, a to zosilnením A . Ostatné parametre sú $g_i \rightarrow 0$ a $g_o \rightarrow \infty$. Náhradný obvod so zodpovedajúcim grafom je na obr. 90.



Obr. 90

Obr. 91

Riešenie obvodov s ideálnym zosilňovačom bude o niečo jednoduchšie ako s reálnym zosilňovačom. Zopakujme príklad 40 pre ideálny zosilňovač. Grafy obvodu sú na obr. 91. Získame ich z obr. 89 vynechaním uzla v a vetiev do uzla 3, pretože $Y \rightarrow \infty$. Z grafu určíme napäťový prenos, vstupnú impedanciu a výstupnú impedanciu.

$$\begin{aligned}
 K_u = \frac{u_o}{u_i} &= \frac{\frac{G_1(-A)}{Y_2}}{1 - (-A)\frac{G_2}{Y_2}} = \frac{-AG_1}{Y_2 + AG_2} = \frac{-AG_1}{G_1 + G_2 + AG_2} = -\frac{G_1}{G_2} \frac{1}{1 + \frac{1}{A}\left(1 + \frac{G_1}{G_2}\right)} = \\
 &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{A}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}, \\
 Z_i = \frac{u}{i} &= \frac{1}{Y_1} \frac{1 - (-A)\frac{G_2}{Y_2}}{1 - \frac{G_1}{Y_2} \frac{G_1}{Y_1} + \frac{G_2}{Y_2}} = \frac{Y_2 + AG_2}{Y_1 Y_2 - G_1^2 + AG_2} = \frac{G_1 + (A+1)G_2}{(A+1)G_1 G_2} = R_1 + \frac{R_2}{A+1}, \\
 Z_o = \frac{u}{i} &= \frac{1}{Y_1} = 0.
 \end{aligned}$$

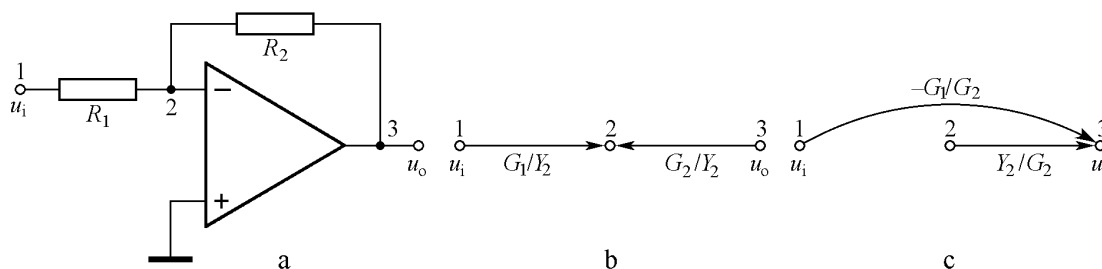
Tieto výsledky by sme dostali aj z výsledkov príkladu 40 limitným prechodom pre $g_i \rightarrow 0$, $r_o \rightarrow 0$.

5.4.4 Ideálny operačný zosilňovač

je výborným modelom, vhodným na prvý odhad vlastností obvodu, v ktorom je zapojený operačný zosilňovač. Problémom je, že ideálny OZ vlastne nemá žiadny parameter, ktorý by mal reálny obraz. Všetky hodnoty parametrov sú vlastne limitné: $g_i \rightarrow 0$, $g_o \rightarrow \infty$, $A \rightarrow \infty$. Nevieme nakresliť náhradnú schému, ani jej graf. Prítomnosť ideálneho OZ sa v obvode prejavuje tým, že cez operačnú sieť udržuje na svojich vstupoch nulovú hodnotu diferenčného napätia $u_d = u_+ - u_- = 0$ obr. 92a.

Pri kreslení grafu zistíme (obr. 92b), že z uzla 2 do uzla 3 nevieme vetve, ktorú by sme tam podľa doterajších pravidiel kreslili, určiť prenos. Bol by nekonečne veľký, ale signál z uzla 2 je rovný nule. Súčin $0 \cdot \infty$ je v tomto prípade síce číslo konečné, ale práve jeho veľkosť máme určiť. Vetvu z uzla 2 do

3 teda nenakreslíme (obr. 92b). Vidíme, že chýba vetva vstupujúca do uzla 3, ktorý je podľa grafu obrazom zdroja. Aby sme určili signál uzla 3, invertujeme **vždy** vetvu z výstupu OZ na jeho (-) vstup. V našom prípade je výsledný graf na obr. 92c. Teraz sa prenos už dá určiť: $K_u = u_o/u_i = -G_1/G_2 = -R_2/R_1$. Výsledok zodpovedá limitnému prechodu pre $A \rightarrow \infty$ vo výsledkoch pre ideálny aj reálny OZ. Prenos z uzla 2 do uzla 3 je nulový, lebo signál uzla 2 je tiež nulový.

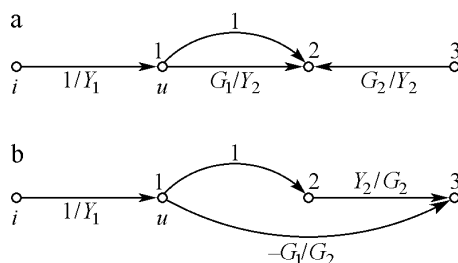


Obr. 92

Určíme teraz vstupný odpor z grafu na obr. 93a. Opäť invertujeme vetvu z uzla 3 do 2 a doplníme podmienkou $u_2 = 0$ (obr. 93b).

$$Z_i = \frac{u}{i} = \frac{1}{Y_1} = R_1.$$

Výstupnú impedanciu určíme ľahko aj bez kreslenia grafu. Vlastná admitancia uzla 3 je $Y_2 \rightarrow \infty$, preto všetky prenosy do tohto uzla budú rovné nule, teda aj výstupná impedancia je $Z_o = 1/Y_2 = 0$.



Obr. 93

Príklad 41. Určíme dvojbránové parametre obvodu z obr. 94a.

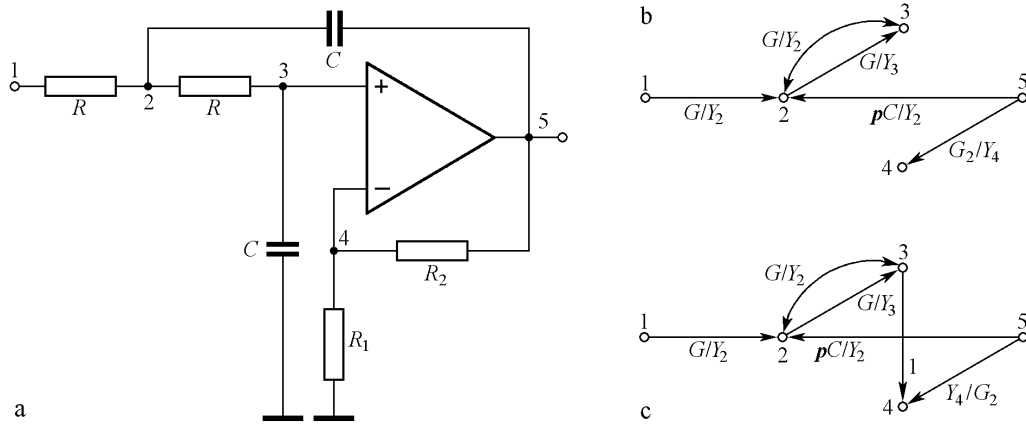
Vlastná admitancia uzla 5 je $Y \rightarrow \infty$, preto do tohto (výstupného) uzla nesmeruje žiadna vetva grafu (obr. 94b). Invertujeme vetvu $5 \rightarrow 4$ na $4 \rightarrow 5$, doplníme podmienkou, o ktorej splnenie sa stará operačný zosilňovač, a to $u_4 = u_3$. V grafe nakreslíme vetvu $3 \rightarrow 4$ s prenosom 1 (obr. 94c). Vyhľadáme v grafe cesty a slučky.

$$D1 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5, \quad S1 = 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2, \quad S2 = 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2.$$

Obe slučky sa dotýkajú prenosovej cesty, preto činiteľ napäťového prenosu je:

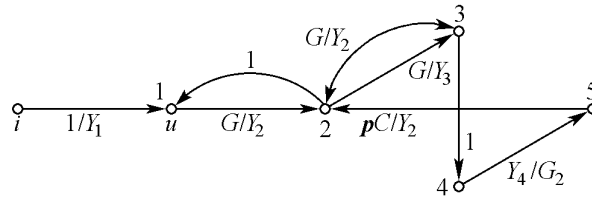
$$\begin{aligned} K_u = \frac{u_5}{u_1} &= \frac{D1}{1 - S1 - S2} = \frac{\frac{G}{Y_2} \frac{G}{Y_3} \cdot 1 \cdot \frac{Y_4}{G_2}}{1 - \frac{G}{Y_2} \frac{G}{Y_3} - \frac{G}{Y_2} \cdot 1 \cdot \frac{Y_4}{G_2} \frac{pC}{Y_2}} = \frac{G^2 Y_4}{(Y_2 Y_3 - G^2) G_2 - pCG Y_4} = \\ &= \frac{G^2 (G_1 + G_2)}{[(pC + 2G)(pC + G) - G^2] G_2 - pCG (G_1 + G_2)} = \frac{G^2 (1 + G_1/G_2)}{G^3 + 3pCG + p^2 C^2 + pCG (1 + G_1/G_2)} = \\ &= \frac{K_0}{1 - (3 - K_0)P + P^2}, \end{aligned}$$

kde $K_0 = 1 + G_1/G_2 = 1 + R_2/R_1$ a $P = pC/G = pCR$.



Obr. 94

Výstupná impedancia je $Z_o = 0$. Vlastná admitancia uzla 5 je $Y_5 \rightarrow \infty$, a teda po pripojení prúdového zdroja do tohoto uzla je napäťová odozva v uzle nulová. Vstupnú impedanciu určíme z grafu na obr. 95, ktorý vznikne z grafu na obr. 94c pripojením ideálneho zdroja prúdu do uzla 1.

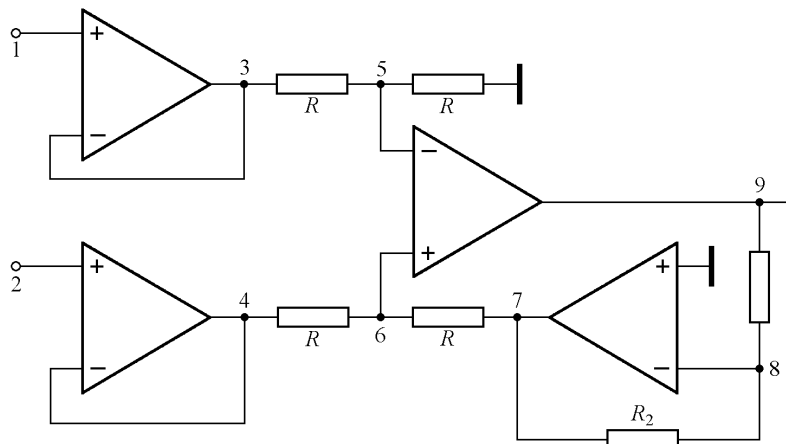


Obr. 95

$$Z_i = \frac{u}{i} = \frac{1}{Y_1} \frac{1 - \frac{G}{Y_3} \frac{G}{Y_2} \frac{G}{Y_3} \cdot 1 \cdot \frac{Y_4}{G_2} \frac{pC}{Y_2}}{1 - \frac{G}{Y_2} \frac{G}{Y_3} \frac{G}{Y_2} \frac{G}{Y_3} \cdot 1 \cdot \frac{Y_4}{G_2} \frac{pC}{Y_2}} = R_1 \frac{1 - (3 - K_0)P + P^2}{(2 - K_0)P + P^2}$$

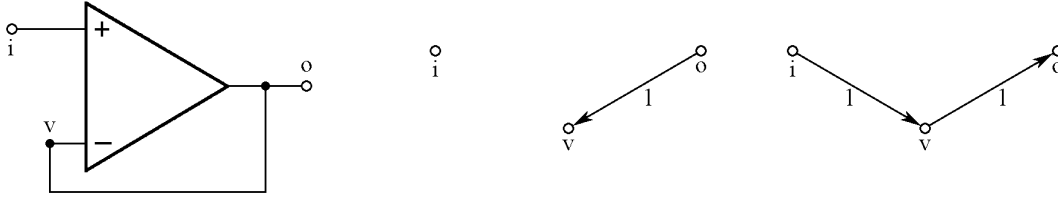
Záver: Pri riešení obvodov, v ktorých operačný zosilňovač považujeme za ideálny, invertujeme v grafe najprv vetvy z výstupu zosilňovača na invertujúci (-) vstup a potom dopĺňame podmienku rovnosti napätí na (+) a (-) vstupoch. Smer vetvy medzi vstupmi volíme podľa okolností taký, aký nám je výhodnejší.

Príklad 42. Vyšetříme prenos obvodu z obr. 96, ktorého orientovaný graf je na obr. 98



Obr. 96

Očíslujeme vstupy a nakreslíme graf. Pretože ideálny OZ sa prejavuje v obvode tým, že napätia (+) a (-) vstupov sú rovnaké, tak pri prenose z uzla i do uzla o postupujeme podľa grafov na obr. 97. Invertujeme vetvu $v \rightarrow o$ a prikreslíme podmienku $u_o = u_i$. Prenos z i do o je jednotka. Výsledok použijeme pri kreslení grafu pre obvod z obr. 96

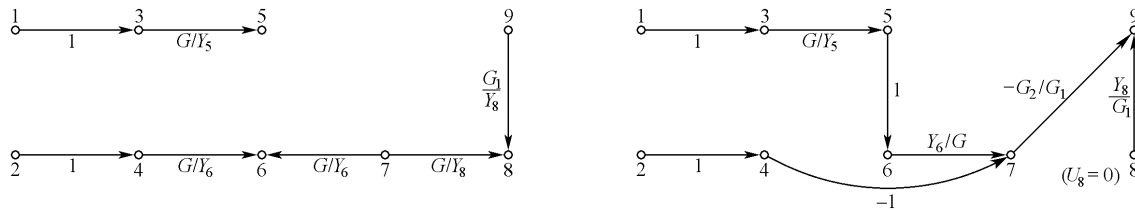


Obr. 97

Aby sme mohli z grafu na obr. 98a určiť výstupné napätie, treba invertovať najprv vetvu $9 \rightarrow 8$ na $8 \rightarrow 9$. Ešte stále chýba prenos z 6 na 9, preto invertujeme aj vetvu $7 \rightarrow 6$ na $6 \rightarrow 7$. Teraz doplníme podmienku $u_o = u_i$. Výsledný graf je na obr. 98b. Napätie uzla 8 je nulové, pretože (+) vstup tohto OZ je spojený s referenčným uzlom. V grafe nie je ani jedna slučka a výstupné napätie závisí od signálov uzlov 1 a 2 ($Y_5 = Y_6 = 2G$):

$$u_o = \left[u_1 \left(1 \cdot \frac{G}{Y_5} \cdot 1 \cdot \frac{Y_6}{G} \right) + u_2 (-1 \cdot 1) \right] \left(-\frac{G_2}{G_1} \right) = \frac{R_1}{R_2} (u_2 - u_1).$$

Ide teda o rozdielový zosilňovač s nastaviteľným zosilnením.

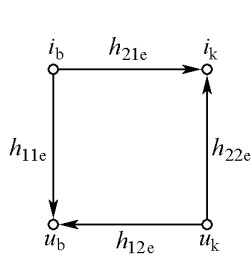


Obr. 98

5.4.5 Obvody s tranzistormi

Na opis tranzistorov ako trojbodov sa používa viacero súborov parametrov. Okrem admitančných sú to najčastejšie hybridné, u vysokofrekvenčných tranzistorov to bývajú S – parametre. Často sa nájdu v konštrukčnom katalógu aj hodnoty parametrov pre Giacolettiho model. Vzhľadom na veľký rozptyl hodnôt parametrov, ktoré sú u každého kusa tranzistora aj toho istého typu dost' odlišné, nemá význam snažiť sa o presný výpočet vlastností zapojenia. Dôležité je vystihnúť závislosť vlastností obvodu od parametrov určujúcich prvkov.

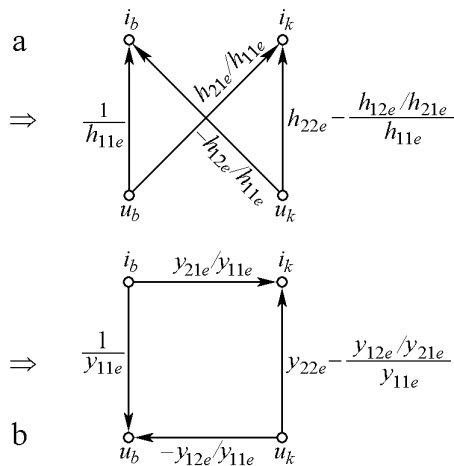
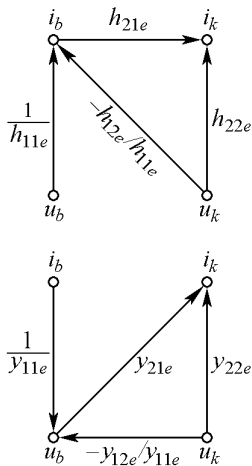
Užitočné bude zmieniť sa o prechode z y parametrov na h a naopak. Okrem doteraz používaných indexov pri parametroch pridáme ďalší, ktorý udáva, o aké zapojenie tranzistora ide. Hybridné rovnice pre tranzistor so spoločným emitorom a ich graf je na obr. 99. Z grafu h do grafu y prejdeme inverziou vetvy $i_b \rightarrow u_b$ a úpravou grafu (obr. 100a). Z y grafu do h prejdeme invertovaním vetvy $u_b \rightarrow i_b$ (obr. 100b). Transformáciami grafu z obr. 87a môžeme získavať prevody medzi zapojeniami s rôznymi spoločnými elektródami.



$$u_b = h_{11e} i_b + h_{12e} u_k$$

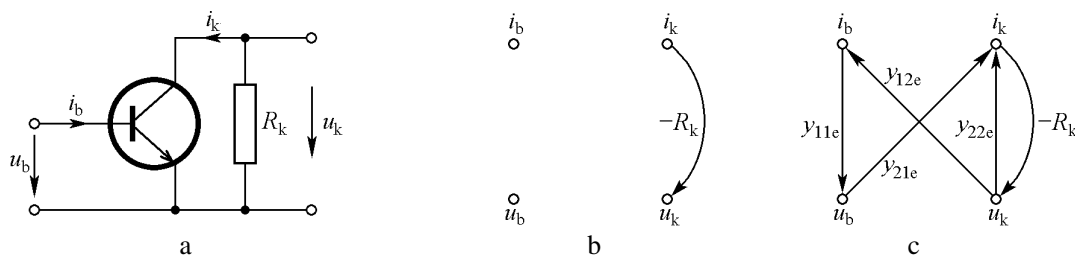
$$i_b = h_{21e} i_b + h_{22e} u_k$$

Obr. 99



Obr. 100

Pri riešení obvodov s tranzistormi pribudnú do grafov aj uzly pre prúdy i_b , i_k , i_c . Nakreslíme najprv graf obvodu z obr. 101a bez tranzistora (obr. 101b). Nakoniec ho doplníme grafom zodpovedajúcim zvolenej sústave parametrov. Vyberieme si y_e (obr. 101c). Teraz môžeme určiť potrebné údaje, napr.



Obr. 101

$$K_u = \frac{u_k}{u_b} = \frac{y_{21e}(-R_k)}{1 + y_{22e}(-R_k)} = -\frac{y_{21e}R_k}{1 + y_{22e}R_k},$$

$$Y_i = \frac{i_b}{u_b} = \frac{y_{11e}(1 + y_{12e}R_k) - y_{21e}R_k y_{12e}}{1 + y_{22e}R_k} = y_{11e} - \frac{y_{21e}y_{12e}R_k}{1 + y_{22e}R_k}.$$

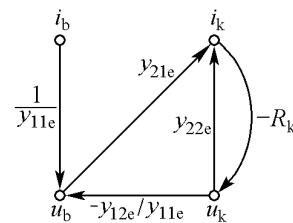
Výstupnú impedanciu určíme osvedčeným spôsobom: Skratujeme bázu na emitor (z grafu môžeme odstrániť uzol u_b) a na výstup pripojíme zdroj prúdu i . V grafe to znamená nový uzol i , z ktorého vedie vetva do uzla u_k a má prenos $1/Y_k = R_k$.

$$Z_o = \frac{u_k}{i} = \frac{R_k}{1 + y_{22e}R_k}$$

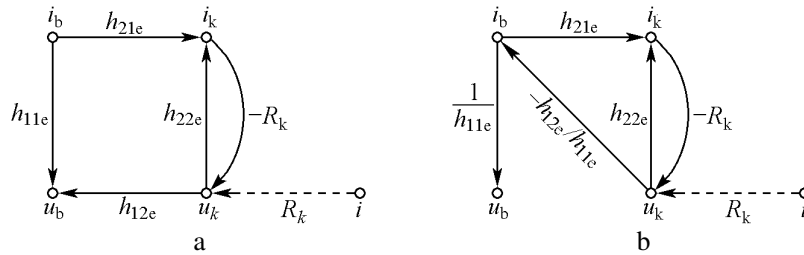
Na určenie prúdového prenosu musíme invertovať vetvu $u_b \rightarrow i_b$ (obr. 102).

V grafe sú dve slučky $i_k \rightarrow u_k \rightarrow i_k$ a $i_k \rightarrow u_k \rightarrow u_b \rightarrow i_b$.

$$K_i = \frac{i}{i_b} = \frac{y_{21e}/y_{11e}}{1 + y_{22e}R_k - R_k y_{21e}y_{12e}/y_{11e}} = \frac{y_{21e}}{y_{11e} + R_k(y_{11e}y_{22e} - y_{21e}y_{12e})}.$$



Obr. 102



Obr. 103

Zopakujeme riešenie pre sústavu h parametrov. Potrebne grafy sú na obr. 103.

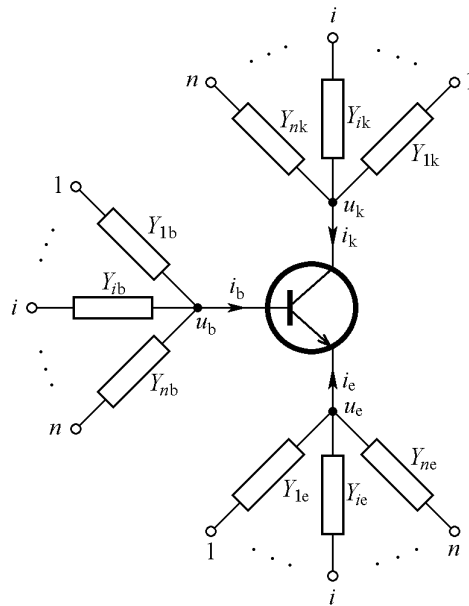
$$K_u = \frac{u_k}{u_b} = \frac{-R_k h_{21e}/h_{11e}}{1 + h_{22e}R_k - h_{21e}R_k h_{12e}/h_{11e}} = -\frac{h_{21e}R_k}{h_{11e} + R_k(h_{22e}h_{11e} - h_{12e}h_{21e})} \quad (\text{z obr. 103b})$$

$$Z_i = \frac{u_b}{i_b} = \frac{h_{11e}(1 + h_{22e}R_k) - h_{21e}R_k h_{12e}}{1 + h_{22e}R_k} = h_{11e} - \frac{h_{21e}h_{12e}R_k}{1 + h_{22e}R_k} \quad (\text{z obr. 103a})$$

$$Z_o = \frac{u_k}{i} = \frac{R_k}{1 + h_{22e}R_k} \quad (\text{z obr. 103a, } u_b = 0)$$

$$K_i = \frac{i_k}{i_b} = \frac{h_{21e}}{1 + h_{12e}R_k} \quad (\text{z obr. 103a})$$

Aby sme sa vyhli zvyšovaniu počtu premenných, a tým aj zložitosti grafu, zostaneme u metódy uzlových potenciálov a upravíme rovnice pre obvod s tranzistorom tak, aby v nich nevystupovali prúdy. Na obr. 104 je zobrazený tranzistor zapojený do obvodu. Napíšeme rovnice podľa Kirchhoffovho pravidla pre prúdy pre uzly b, k, e .



Obr. 104

$$b: \sum_i (u_i - u_b) Y_{ib} - i_b = 0,$$

$$k: \sum_i (u_i - u_k) Y_{ik} - i_k = 0,$$

$$e: \sum_i (u_i - u_e) Y_{ie} - i_e = 0.$$

Vlastnosti tranzistora opíšeme y parametrami v zapojení so spoločným emitorom. Rovnice, ktoré opisujú tranzistor sú

$$\begin{aligned} b: i_b &= y_{11e}(u_b - u_e) + y_{12e}(u_k - u_e), \\ k: i_k &= y_{21e}(u_b - u_e) + y_{22e}(u_k - u_e), \\ e: i_e &= -i_b - i_k. \end{aligned}$$

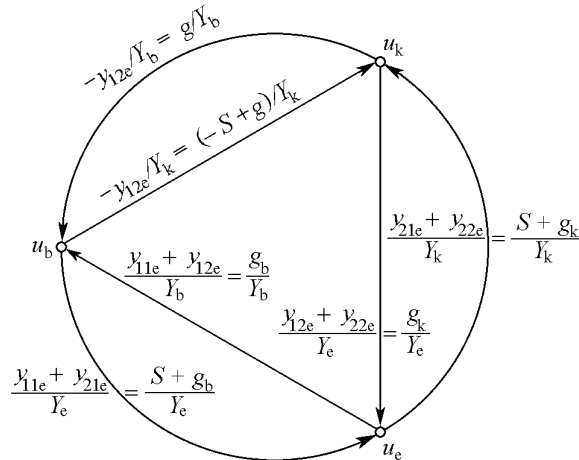
Vylúčime z uvedenej sústavy šiestich rovníc prúdy. Tým sa počet neznámych (aj rovníc) zmenší na polovicu. Dosadíme prúdy z posledných troch do prvých troch rovníc a vypočítame elektródové napätia:

$$b: \sum_i u_i Y_{ib} - y_{12e}u_k + (y_{11e} + y_{12e})u_e = (y_{11e} + \sum_i Y_{ib})u_b = (y_{11e} + Y_{bb})u_b = Y_b u_b,$$

$$k: \sum_i u_i Y_{ik} - y_{21e}u_b + (y_{21e} + y_{22e})u_e = (y_{22e} + \sum_i Y_{ik})u_k = (y_{22e} + Y_{kk})u_k = Y_k u_k,$$

$$e: \sum_i u_i Y_{ie} + (y_{11e} + y_{21e})u_b + (y_{12e} + y_{22e})u_k = (y_{11e} + y_{12e} + y_{21e} + y_{22e} + \sum_i Y_{ie})u_e = (\sum Y + Y_{ee})u_e = Y_e u_e.$$

Veličiny Y_b , Y_k , Y_e sú vlastné admitancie uzlov b , k , e . Admitancie Y_{bb} , Y_{kk} , Y_{ee} sú súčty všetkých admitancií obvodu bez tranzistora pripojených do uzlov b , k , e . Výrazy $\sum_i u_i Y_{ix}/Y_x$ sú v grafe zobrazené ako vetvy vstupujúce do uzlov $x = b, k, e$. Graf samotného tranzistora je na obr. 105. Graf je však jednoduchý len zdanlivo. Nájdeme v ňom 5 slučiek, ktorých prenosy sú dosť komplikované výrazy. Bude preto účelné zaviesť nejaké zjednodušenia. Netreba počítať so všetkými parametrami, avšak paušálne zjednodušenie vedie často k chybným výsledkom. Preto bude dobré bližšie si všimnúť číselné hodnoty parametrov.



Obr. 105

Strmost' nevelmi závisí od typu tranzistora a je $S = I_k/U_T \approx 40 \cdot I_k \text{ A/V}$. V katalógoch téměř vždy nájdeme prúdový zosilňovací činiteľ $\beta = h_{21e} = i_k/i_b \approx 10^2$ až 10^3 . Vstupná admitancia je $g_b = S/\beta$, výstupná admitancia je $g_k = i_k/U_Y = (i_k/U_T)/(U_T/U_Y) \approx S/7000$, spätná admitancia $g = i_b/u_k = g_k/\beta$.

Vyčíslime si pre ilustráciu spomínané parametre pre $I_k = 2,5 \text{ mA}$, $U_k = 10 \text{ V}$, napájacie napätie 20 až 30 V a $\beta = 300$, čo sú bežné praktické hodnoty (obr. 107a)

$$\begin{aligned} S &= 0,1 \text{ A/V} \\ g_b &= S/\beta = 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ A/V} \\ g_k &= S/7000 = 1,43 \cdot 10^{-4} \text{ A/V} \\ g &= g_k/\beta = 4,77 \cdot 10^{-8} \text{ A/V} \\ G_k &= I_k/U_k = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ A/V} \\ G_b &= G_k/\beta = 10^{-8} \text{ A/V} \\ G_e &= 5 \cdot G_k = 10^{-4} \text{ A/V} \\ y_{11e} &= g_b + g_k/\beta \\ y_{12e} &= -g_k/\beta \\ y_{21e} &= S - g_k/\beta \\ y_{22e} &= g_k + g_k/\beta \end{aligned}$$

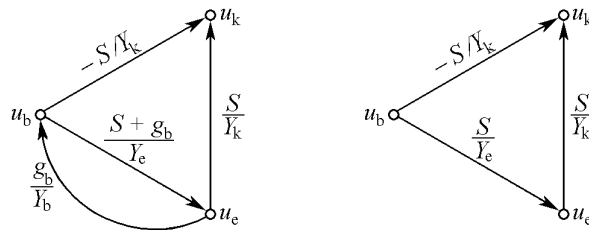
Odpory R_k, R_b, R_e majú hodnoty potrebné na nastavenie pracovného bodu a vlastné admitancie uzlov b, k, e tranzistora budú zvyšovať. Tieto admitancie, prenosi vetiev a slučiek grafu z obr. 105 si zostavíme do tabuľky:

$$\begin{aligned}
 Y_b &= G_b + g_b + g = 3,34 \cdot 10^{-4} \text{ A/V} \approx g_b \\
 Y_k &= G_k + g_k + g = 2,64 \cdot 10^{-4} \text{ A/V} \approx G_k \\
 Y_e &= G_e + S + g_b + g_k + g \approx 0,101 \text{ A/V} = S + G_e \\
 D(b \rightarrow k) &= -y_{21e}/Y_k \approx -S/Y_k \approx -377,36 \\
 D(k \rightarrow b) &= -y_{12e}/Y_b = -g/Y_b \approx -1,496 \cdot 10^{-4} \\
 D(b \rightarrow e) &= (y_{21e} + y_{11e})/Y_e = (S + g_b)/Y_e \approx 0,990 \\
 D(e \rightarrow b) &= (y_{11e} + y_{12e})/Y_b = g_b/Y_b \approx 0,997 \\
 D(e \rightarrow k) &= (y_{21e} + y_{22e})/Y_k = (S + g_k)/Y_k \approx 377,42 \\
 D(k \rightarrow e) &= (y_{12e} + y_{22e})/Y_e = g_k/Y_e \approx 1,485 \cdot 10^{-4} \\
 S(b \rightarrow k \rightarrow b) &= D(b \rightarrow k) \cdot D(k \rightarrow b) \approx 5,643 \cdot 10^{-2} \\
 S(b \rightarrow e \rightarrow b) &= D(b \rightarrow e) \cdot D(e \rightarrow b) \approx 0,987 \\
 S(e \rightarrow k \rightarrow e) &= D(e \rightarrow k) \cdot D(k \rightarrow e) \approx 5,605 \cdot 10^{-2} \\
 S(b \rightarrow k \rightarrow e \rightarrow b) &\approx -5,588 \cdot 10^{-2} \\
 S(b \rightarrow e \rightarrow k \rightarrow b) &\approx -5,588 \cdot 10^{-2}
 \end{aligned}$$

Podľa absolútnej hodnoty veľkosti prenosov môžeme zanedbať vplyv vetiev $k \rightarrow b$ a $k \rightarrow e$. Toto zjednodušenie je oprávnené aj preto, že vynechaním spomenutých vetiev vymiznú aj príslušné slučky, ktorých prenosi sa aj tak vyrušia (spomeňte si na menovateľ Masonovho vzťahu). Graf sa zjednoduší na tvar uvedený na obr. 106a. Na orientačný odhad vlastností obvodu s tranzistorom môžeme graf zjednodušiť ešte vynechaním vetvy $e \rightarrow b$ (zanedbáme $g_b \approx 0$).

Jednoduchý a jednoznačný návod čo kedy zanedbať nejestvuje.

Vo väčšine prípadov postačí orientačný odhad, na presnejšie výpočty podľa skutočných (zmeraných) hodnôt parametrov treba využiť počítač.

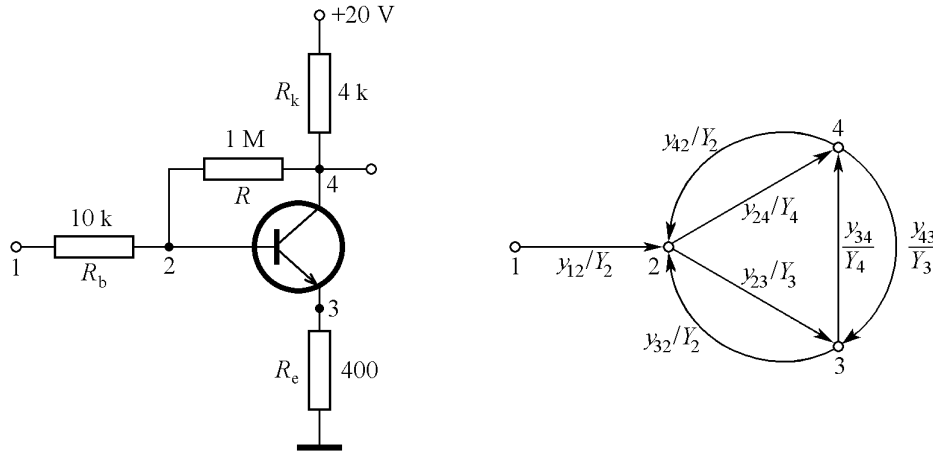


Obr. 106

Príklad 43. Preskúmame obvod z obr. 107 pre $S = 100 \text{ mA/V}$. Určíme najprv parametre tranzistora:

$$\begin{aligned}
 I_k &\approx S/40 = 2,5 \text{ mA} & g_b &= S/\beta \approx 3,36 \cdot 10^{-4} \text{ A/V} \\
 U_{ke} &= 20 \text{ V} - (R_k + R_e)I_k \approx 9 \text{ V} & g_k &= S/7000 \approx 1,43 \cdot 10^{-5} \text{ A/V} \\
 I_b &\approx (9 - 0,6)/1M = 8,4 \cdot 10^{-6} \text{ A} & g &= g_k/\beta = 4,82 \cdot 10^{-8} \text{ A/V} \\
 \beta &= I_k/I_b \approx 298
 \end{aligned}$$

Úlohu nebudeme riešiť analyticky ale číselne. Vypočítame dvojbránové parametre z grafu na obr. 107, potom približne po zanedbaní g, g_k a nakoniec orientačne s vynechaním aj vstupného odporu tranzistora ($g_b = 0$).



Obr. 107

$$K_u = \frac{Y_{12}}{Y_2} \left(\frac{Y_{24}}{Y_4} + \frac{Y_{23}}{Y_3} \frac{Y_{34}}{Y_4} \right); \quad Z_o = \frac{1}{Y_4} \frac{1 - \frac{Y_{23}}{Y_3} \frac{Y_{32}}{Y_2}}{M}; \quad Z_i = \frac{M}{M - \frac{Y_{12}}{Y_2} + \frac{Y_{12}}{Y_2} \frac{Y_{34}}{Y_4} \frac{Y_{43}}{Y_3}},$$

kde $M = 1 - \frac{Y_{23}}{Y_3} \frac{Y_{32}}{Y_2} - \frac{Y_{24}}{Y_4} \frac{Y_{42}}{Y_2} - \frac{Y_{34}}{Y_4} \frac{Y_{43}}{Y_3} - \frac{Y_{24}}{Y_4} \frac{Y_{43}}{Y_3} \frac{Y_{32}}{Y_2} - \frac{Y_{23}}{Y_3} \frac{Y_{34}}{Y_4} \frac{Y_{42}}{Y_2}$

a

$$\begin{aligned} Y_1 &= G_b & y_{12} &= G_b & y_{24} &= -S + g + G \\ Y_2 &= g_b + G_b + G + g & y_{23} &= S + g_b & y_{42} &= g + G \\ Y_3 &= S + g_b + g_k + G_e & y_{32} &= g_b & y_{34} &= S + g_k \\ Y_4 &= g_k + G + G_k + g & & & y_{43} &= g_k \end{aligned}$$

Zoradíme číselné hodnoty prenosov vetiev a slučiek do tabuľky, aby bolo vidieť účinky zjednodušovaní (preto taký počet desatinných miest).

Veličina	presne	približne	Δ %	orientačne	Δ %
y_{12}/Y_2	0,229033	0,2290589	0,011	0,990099	332,2
y_{23}/Y_3	0,9755538	0,9756894	0,014	0,9756098	0,01
y_{32}/Y_2	0,7685669	0,7685132	-0,007	0	
y_{24}/Y_4	-376,88002	-398,40239	5,71	-398,40239	5,71
y_{42}/Y_2	0,0021853	0,0022906	4,82	0,009901	354,1
y_{34}/Y_4	376,93781	398,40637	5,7	398,40637	5,7
y_{43}/Y_3	0,0001389	0		0	
S1	0,7497784	0,7499649	0,292	0	
S2	-0,8217998	-0,9125729	11,04	-3,9445781	379,99
S3	0,0523562	0		0	
S4	-0,0402331	0		0	
S5	0,8018328	0,89036966	11,05	3,8484074	379,95
D1	-86,317941	-91,257292	5,72	-394,45781	356,98
D2	84,220709	89,039658	5,72	384,84074	356,94
M	0,258065	0,272211	5,48	1,096171	324,76
K_u	-8,126744	-8,146734	0,25	-8,773336	7,95
Z_o [Ω]	3654,2871	3659,4927	0,14	3634,5285	-0,54
Z_i [Ω]	62906,348	63080,041	0,28	103342,41	64,27

Ako vidno v prehľade, v tomto prípade chyba orientačného výsledku pre prenos a výstupnú impedanciu nie je veľká. Pre vstupnú impedanciu je už značná, čo je pochopiteľné, lebo vstupná admitancia tranzistora, ktorú sme neuvažovali, významne ovplyvňuje vstupnú impedanciu zapojenia. Pre vyššie kmitočty je $g_b \rightarrow y_b$, $g_k \rightarrow y_k$, $g \rightarrow y_e$, t. j. parametre tranzistora sú kmitočtovo závislé a majú kapacitný charakter.

Príklad 44. Vypočítame dvojbránové parametre kaskódy z obr. 108a. Na prvý odhad vlastností zapojenia budeme predpokladať, že $y_{ei}, y_{ki}, y_{bi} = 0$. Graf obvodu je na obr. 108b.

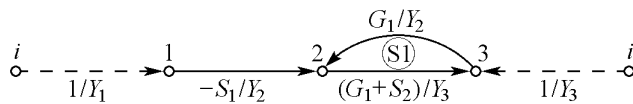
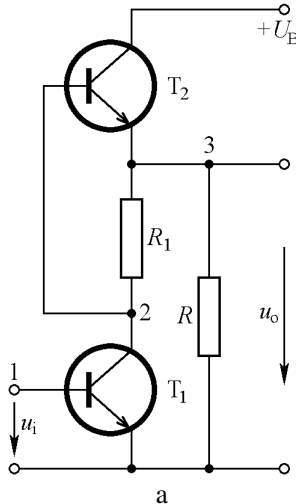
$$Y_2 = G_1; \quad Y_1 = S_2 + G_1 + G_2,$$

$$K_u = \frac{-\frac{S_1}{Y_2} \frac{G_1 + S_2}{Y_3}}{1 - \frac{G_1}{Y_2} \frac{G_1 + S_2}{Y_3}} = \frac{-S_1(G_1 + S_2)}{Y_2 Y_3 - G_1(G_1 + S_2)} = \frac{-S_1(G_1 + S_2)}{G_1 G} = -S_1 R(1 + S_2 R_1) \approx -S_1 S_2 R_1 R,$$

$$Z_o = \frac{1}{Y_3} \frac{1}{1 - \frac{G_1}{Y_2} \frac{G_1 + S_2}{Y_3}} = \frac{Y_2}{Y_2 Y_3 - G_1(G_1 + S_2)} = \frac{G_1}{G_1 G} = R.$$

Na určenie vstupnej impedancie budeme počítať s konečnou nenulovou hodnotou $y_{bi} \ll S_1$. Na vstup (uzol 1) pripojíme zdroj prúdu i a vypočítame napätie uzla 1. Keďže je $Y_1 = y_{bi}$ a slučka $S1$ (súčasne je to aj jej prenos) sa nedotýka cesty z i do uzla 1, takže

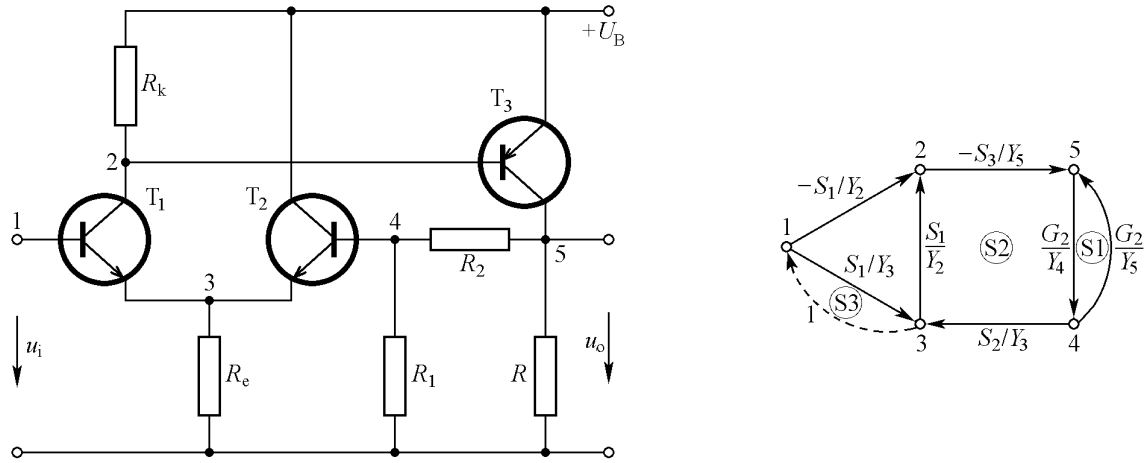
$$Z_i = \frac{1}{Y_1} \frac{1 - S1}{1 - S1} = \frac{1}{Y_1} = Y_{bi}.$$



Obr. 108

Príklad 45. Vypočítame dvojbránové parametre pre zapojenie z obr. 109. Pri určení napätového prenosu a výstupnej impedancie budeme hodnoty y_{ei}, y_{ki}, y_{bi} (pre $i = 1, 2, 3$) považovať za nulové. Vzťahy možno zjednodušiť, ak si uvedomíme, že hodnoty strmostí sú značne väčšie ako ktorakolvek z vodivostí použitých v zapojení, a navyše je $R \ll R_1 + R_2$ (v opačnom prípade by funkciu odporu R mohli prebrať R_1 a R_2).

$$Y_2 = G_k; \quad Y_3 = G_e + S_1 + S_2; \quad Y_4 = G_1 + G_2; \quad Y_5 = G_2 + G;$$



Obr. 109

$$K_u = \frac{u_5}{u_1} = \frac{-\frac{S_1}{Y_2} - \frac{S_2}{Y_3} + \frac{S_1}{Y_3} \frac{S_1}{Y_2} - \frac{S_3}{Y_5}}{1 - \frac{G_2}{Y_4} \frac{G_2}{Y_5} - \frac{-S_3}{Y_5} \frac{G_2}{Y_4} \frac{G_2}{Y_3} \frac{S_1}{Y_2}} = \frac{S_1 S_3 Y_3 Y_4 - S_1^2 S_3 Y_4}{(Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 Y_3 + S_1 S_2 S_3 G_2} \approx$$

$$\approx \frac{S_1 S_3 (G_1 + G_2)(G_e + S_2)}{S_1 S_2 S_3 G_2} \approx \frac{G_1 + G_2}{G_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1},$$

$$Z_o = \frac{1}{Y_5} \frac{1}{1 - \frac{G_2}{Y_4} \frac{G_2}{Y_5} - \frac{-S_3}{Y_5} \frac{G_2}{Y_4} \frac{G_2}{Y_3} \frac{S_1}{Y_2}} = \frac{Y_2 Y_3 Y_4}{(Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 Y_3 + S_1 S_2 S_3 G_2} \approx$$

$$\approx \frac{G_k (G_e + S_1 + S_2)(G_1 + G_2)}{S_1 S_2 S_3 G_2} \approx \frac{1}{S_3} \frac{1}{S_1 R_k} \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Na určenie vstupnej impedancie musíme počítať s nenulovou hodnotou $y_{bi} \ll S_1$. Do grafu pribudne vetva $3 \rightarrow 1$ s prenosom $y_{bi}/Y_1 = 1$, tým aj tretia slučka S3, ktorá sa nedotýka slučky S1 a štvrtá slučka S4 = 123451 s prenosom $S4 = -S2$.

$$Z_i = \frac{1}{Y_1} \frac{1 - S1 - S2}{1 - S1 - S2 - S3 - S4 + S1S3} = \frac{1}{Y_1} \frac{1 - S1 - S2}{(1 - S1)(1 - S3)} = \frac{1}{Y_1} \frac{(Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 Y_3 + S_1 S_2 S_3 G_2}{(Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 (Y_3 - S_2)} \approx$$

$$\approx \frac{S_1 S_2 S_3 G_2}{y_{bi} G_k [G(G_1 + G_2) + G_1 G_2] S_2} \approx r_{bi} \frac{S_1 R_k S_3 R}{1 + R_2/R_1}.$$

Príklad 46. Vypočítame dvojbránové parametre pre zapojenie z obr. 110.

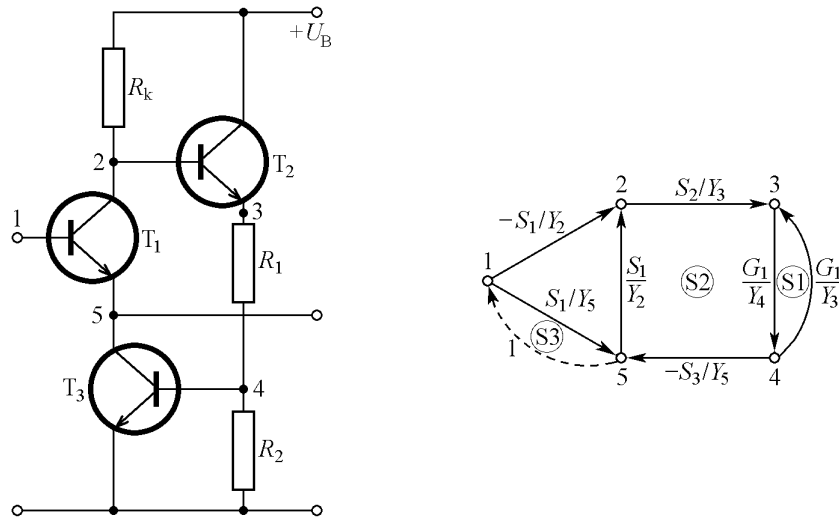
Budeme postupovať rovnako ako v príklade 45. Pri určovaní vstupnej impedancie pribudnú dve slučky $S_2 = S_1/Y_5$ a $S4 = 123451 = -S2$. Použijeme $Y_5 = S_1 + y_{bi}$ a $y_{bi} = S_1/\beta_1$.

$$K_u = \frac{u_5}{u_1} = \frac{\frac{S_1}{Y_5} (1 - S1) + \frac{-S_1}{Y_2} \frac{S_2}{Y_3} \frac{G_1}{Y_4} \frac{-S_2}{Y_5}}{1 - \frac{G_1}{Y_3} \frac{G_1}{Y_4} - \frac{-S_1}{Y_2} \frac{S_2}{Y_3} \frac{G_1}{Y_4} \frac{-S_2}{Y_5}} = \frac{S_1 (Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 + S_1 S_2 S_3 G_1}{(Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 Y_5 + S_1 S_2 S_3 G_1} \approx 1,$$

lebo $Y_5 \approx S_1$ a $S_1, S_2, S_3 \gg G_k, G_1, G_2$.

$$Z_o = \frac{1}{Y_5} \frac{1 - S1}{1 - S1 - S2} = \frac{1}{Y_5} \frac{(Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 Y_5}{(Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 Y_5 + S_1 S_2 S_3 G_1} \approx \frac{S_1 (G_1 + G_2) G_k}{S_1 S_2 S_3 G_1} = \frac{1}{S_2} \frac{1 + R_1/R_2}{S_3 R_k},$$

$$Z_i = \frac{1}{Y_{b1}} \frac{(Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 Y + S_1 S_2 S_3 G_{15}}{(Y_4 Y_5 - G_2^2) Y_2 (Y_5 - S_1)} \approx r_{b1} \beta_1 \frac{S_3 R_k}{1 + R_1/R_2}.$$

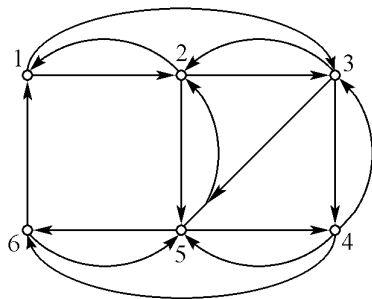


Obr. 110

5.5 Spôsob vyhľadávania prenosových ciest a slučiek orientovaného grafu

Kameňom úrazu v metóde orientovaných grafov je nájdenie všetkých slučiek a ciest, hlavne ak ide o komplikovanejší graf. Spoľahlivý spôsob vyhľadávania slučiek a ciest v grafe autori týchto textov nenašli v žiadnej literatúre. Už pri jednoduchých grafoch možno ľahko vynechať niektoré slučky, čo obyčajne vedie k zlému výsledku. Veľmi rozsiahle obvody je lepšie rozdeliť na menšie časti, tie preskúmať a potom zase zložiť do jedného celku.

Nech má obvod graf na obr. 111. Teraz sú rozhodujúce nie prenosy vetiev, ale štruktúra grafu. Urobíme si tabuľku, v ktorej každému uzlu pripíšeme tie uzly, do ktorých z neho smeruje nejaká vetva.



1	2	3	4	5	6	} ... matica grafu
2	1	2	3	2	1	
3	3	4	5	4	5	
5	5	6	6			

... čísla uzlov – vektor uzlov

Obr. 111

V prvom riadku tabuľky sú poradové čísla uzlov. V každom stĺpci sú poradové čísla tých uzlov, do ktorých vstupuje nejaká vetva vychádzajúca z daného uzla. Napr. z uzla 4 vystupujú vetvy, ktoré smerujú do uzlov 3, 5, a 6. Ideme hľadať slučky grafu. Začneme uzlom 1. Ten sa v matici grafu vyskytuje dvakrát, takže existujú slučky, ktoré prechádzajú uzlom 1. Ak sa v matici grafu niektorý uzol nevyskytne, tak ide o zdroj a týmto uzlom žiadna slučka neprechádza.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
	2				

Pod maticu grafu pred tabuľku napíšeme východzí uzol, aby sme nezabudli, kde začíname. Z matice grafu zistíme, že z uzla 1 vedú vetvy do uzlov 2 a 3. Napíšeme ich čísla do prvého stĺpca (lebo pracujeme s uzlom 1). Aby sme mali akú – takú istotu, že na niečo nezabudneme, budeme postupovať spôsobom LIFO známym z počítačovej praxe (Last In First Out). Budeme vždy spracovávať najspodnejší ešte nespracovaný riadok tabuľky.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
	2	5			
	2	3			
	2	1			

S1

Dvojka v prvom stĺpci znamená, že z uzla 1 sme postúpili príslušnou vetvou do uzla 2. Odtiaľ vedú cesty ďalej do uzlov 1, 3 a 5, ako ľahko zistíme z druhého stĺpca matice grafu. Do tabuľky nám pribudnú ďalšie tri riadky. V poslednom riadku je v druhom stĺpci 1. Znamená to, že sme sa vrátili späť do uzla 1, teda našli sme prvú slučku grafu. Vyznačíme ju vpravo od tabuľky. $S1 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
	2	5			
	2	3	5		
	2	1			
	2	3	4		

S1

Posledný nespracovaný riadok má v druhom stĺpci 3. Pohľadom do matice grafu zistíme, že z uzla 3 (tretí stĺpec) môžeme postúpiť do uzlov 2, 4, 5. Pretože slučka môže uzlom prechádzať iba raz a v spracovávanom riadku už 2 je, tak do tabuľky pribudne iba jeden riadok. Pripíšeme ho na spodok tabuľky.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
	2	5			
	2	3	5		
	2	1			
	2	3	4	5	
	2	3	4	6	

S1

Spracujeme posledný riadok tabuľky. Z uzla 4 postupuje signál do uzlov 3, 5 a 6. Trojka sa už v poslednom riadku vyskytuje, takže z troch uzlov v štvrtom stĺpci pribudne do tabuľky iba jeden ďalší riadok.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
	2	5			
	2	3	5		
	2	1			
	2	3	4	5	
	2	3	4	6	5
	2	3	4	6	1

S1

S2

Prejdeme na posledný riadok a z matice grafu zistíme, že z uzla 6 je možný ďalší postup do uzlov 1 a 5. Do šiesteho stĺpca zapíšeme 5, a pribudne ďalší riadok, ktorý má v šiestom stĺpci 1. Znamená to, že sme sa vrátili do uzla 1, tým sme našli ďalšiu slučku. Vypíšeme ju, čím súčasne označíme riadok, že je spracovaný. $S2 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 1$.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
2	5				
2	3	5			
2	1				
2	3	4	5		
2	3	4	6	5	
2	3	4	6	1	

S1
**
S2

Prejdeme k najspodnejšiemu nespracovanému riadku tabuľky (predposlednému). Z uzla 5 môžeme postúpiť do uzlov 2, 4 a 6. Z týchto čísel sa však už každé raz v riadku vyskytuje, teda slučka nejstvue. Riadok označíme, že je už spracovaný (**).

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
2	5				
2	3	5			
2	1				
2	3	4	5	6	1
2	3	4	6	5	
2	3	4	6	1	

S1
S3
**
S2

V poslednom nespracovanom riadku (tretí zdola) zistíme, že signál postupuje z uzla 5 do uzlov 2, 4 a 6. V riadku už čísla 2 a 4 sú, takže možný postup je iba do uzla 6. Pokračujeme z uzla 6 do uzlov 1 a 5. 5 už v riadku je, takže zostáva 1. To ale znamená návrat do uzla 1, teda tretiu slučku

$$S3 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

Vyznačíme ju a prejdeme na najbližší nespracovaný riadok.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
2	5				
2	3	5		6	
2	1				
2	3	4	5	6	1
2	3	4	6	5	
2	3	4	6	1	
2	3	5		4	

S1
S3
**
S2

Je to tretí riadok. Z uzla 5 postupuje signál do uzlov 2, 4 a 6. 2 už v riadku existuje, preto pribudne jeden nový riadok. Tretí riadok okopírujeme naspodok tabuľky a do jeho piateho stĺpca napíšeme 4, do tretieho riadku piateho stĺpca napíšeme 4, do tretieho riadku piateho stĺpca napíšeme 4.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
2	5				
2	3	5		6	
2	1				
2	3	4	5	6	1
2	3	4	6	5	
2	3	4	6	1	
2	3	5		4	6

S1
S3
**
S2
S4

Zase prejdeme na spodok tabuľky a z matice grafu zistíme, že z uzla 4 vychádzajú vetvy do uzlov 3, 5, 6. Čísla 3 a 5 už v tomto riadku sú, takže cesta postupuje do uzla 6. Napíšeme 6 do štvrtého stĺpca. Z uzla 6 vychádzajú vetvy do uzlov 1 a 5. V riadku už 5 je, ale 1, ktorú napíšeme do šiesteho stĺpca uzatvára ďalšiu slučku

$$S4 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
2	5			6	
2	3	5		6	1
2	1				
2	3	4	5	6	1
2	3	4	6	5	
2	3	4	6	1	
2	3	5		4	6
2	5			4	

S5
S1
S3
**
S2
S4

Posledný nespracovaný riadok je zase tretí riadok tabuľky. Z uzla 6 je možný postup do uzlov 5 a 1. 5 už v riadku je, takže vypísaním 1 do šiesteho stĺpca uzatvárame ďalšiu slučku

$$S5 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

Najbližší nespracovaný riadok je druhý riadok tabuľky. Z uzla 5 postupuje signál do uzlov 2, 4 a 6. V riadku už 2 je, takže do tabuľky pribudne ďalší riadok so 4 v piatom stĺpci. V druhom riadku do piateho stĺpca napíšeme 6.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3				
2	5			6	1
2	3	5		6	1
2	1				
2	3	4	5	6	1
2	3	4	6		5
2	3	4	6		1
2	3	5		4	6
2	5		6	4	1
2	5		3	4	

Vyhľadavanie už začína byť pomaly ale iste rutinnou záležitosťou. Prejdeme na posledný riadok tabuľky. Z možných ďalších uzlov vyhovujú 3 a 6. Napíšeme ich pod seba do štvrtého stĺpca a okopírujeme riadok.

V poslednom riadku zistíme, že ďalší postup z uzla 3 nie je možný, pretože uzly 2, 4 a 5, do ktorých vedú vetvy z uzla 3 už v riadku sú. Označíme riadok príznakom spracovania. V ďalšom riadku (predposlednom) zo 6 končíme v 1, čím je zistená slučka $S6 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 1$.

Najbližší nespracovaný riadok je druhý riadok tabuľky, v ktorom zase z uzla 6 prejdeme do uzla 1, a tým sme našli ďalšiu slučku $S7 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3	5			
2	5			6	1
2	3	5		6	1
2	1				
2	3	4	5	6	1
2	3	4	6		5
2	3	4	6		1
2	3	5		4	6
2	5		6	4	1
2	5		3	4	
3		4			
3		2			

Jediným nespracovaným riadkom je riadok prvý. Z uzla 3 signál postupuje do uzlov 2, 4 a 5, teda pribudnú dva nové riadky.

Ďalší postup už nebudeme opisovať tak podrobne. Vysvetlíme si len niektoré nové fakty. Postupujte ďalej sami a porovnajte si vaše výsledky s tabuľkou.

1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
3	3	4	5	4	5
	5	5	6	6	
1	3	5		6	1
2	5			6	1
2	3	5		6	1
2	1				
2	3	4	5	6	1
2	3	4	6		5
2	3	4	6		1
2	3	5		4	6
2	5		6	4	1
2	5		3	4	
3	1	4	6	2	5
3	1	2			
3	5	2	6	4	1
3	5	2	6	1	
3	1	4	5	2	
3		4	5	6	1
3		4	6		1
3		4	6	4	1
3	1	5		2	
2	5				
3		4			
3		2			

Vyčerpali sme všetky možné slučky, ktoré začínajú v uzle 1. Vo všetkých ďalších krokoch sa už číslo 1 nesmie vyskytovať, pretože by to znamenalo niektorú zo slučiek S1 – S17, ibaže by začínala v inom uzle. Do prvého stĺpca tabuľky preto už nebudeme nič zapisovať. Začneme s uzlom 2, ktorý si označíme vľavo od tabuľky a všetky ďalšie čísla už musia byť väčšie ako 2. Z uzla 2 môže signál postúpiť (pozri maticu grafu) do 1, 3 a 5. Do druhého stĺpca tabuľky zapíšeme iba 5 a 3.

	1	2	3	4	5	6		
	2	1	2	3	2	1		
	3	3	4	5	4	5		
		5	5	6	6			
1	3		5		6	1	S17	13561
	2	5			6	1	S7	12561
	2	3	5		6	1	S5	123561
	2	1					S1	121
	2	3	4	5	6	1	S3	1234561
	2	3	4	6		5	**	
	2	3	4	6		1	S2	123461
	2	3	5		4	6	S4	1235461
	2	5		6	4	1	S6	125461
	2	5		3	4		**	
	3	1	4	6	2	5	S14	1346521
	3	1	2				S8	1321
	3	5	2	6	4	1	S10	1325461
	3	5	2		6	1	S9	132561
	3	1	4	5	2		S12	134521
	3		4	5	6	1	S11	134561
	3		4	6		1	S13	13461
	3		4	6	4	1	S16	135461
	3	1	5		2		S15	13521
2		5			6		**	
		3	5	6			**	
		3	4	6	2	5	S20	234652
		3	2				S18	232
		3	4	5	6		**	
		3	4	5	2		S19	23452
		3	5	4	6		**	
		3	5		2		S21	2352
		5		6	4		**	
		5			2		S22	252
		5	2	3	4		S23	25432
		5	6				**	
		4	6		5		**	
		4	5	6			**	
		4	5	6			**	
		4	3				S24	343
		5	3	4			S25	3543
			6	4	5		S27	4654
			5	4			S26	454
				6	5		S28	565

Postup sa stal už úplnou rutinou, takže od jeho ďalšieho opisu upustíme a vrátíme sa k nemu po vyhľadani všetkých slučiek.

Tam, kde v riadku už je 5, je zbytočné písať, aj keď tam signál postupuje, pretože zo 6 môže ísť iba späť do 5. Ušetríme najmenej osem zbytočných riadkov, ktoré by sme museli označiť **.

2	5	4	3	6	1	S7,	S24
2	1	4	3			S1,	S24
2	1	5	3	4		S1,	S25
2	1		6	4	5	S1,	S27
2	1		5	4		S1,	S26
2	1		6	5		S1,	S28
3	1	2	6	4	5	S8,	S27
3	1	2	5	4		S8,	S26
3	1	2	6	5		S8,	S28
3	5	4	6	2	1	S13,	S22
	3	2	6	4	5	S18,	S27
	3	2	5	4		S18,	S26
	3	2	6	5		S18,	S28
	5	4	3	2		S22,	S24
	4	3	6	5		S24,	S28

Našli sme všetky slučky, ideme hľadať tie, ktoré sa navzájom nedotýkajú. Musíme hľadať také riadky, ktoré môžeme zlúčiť tak, aby sa im neprekrývali stĺpce – slučky nemajú spoločné uzly. Je jasné, že riadky, v ktorých je iba jedna alebo žiadna medzera, nemusíme vyšetrovať. Teraz začneme na vrchu tabuľky. Prvý riadok má medzery v druhom a štvrtom stĺpci, hľadáme preto slučku ktorá prechádza bodmi 242. Taká nejestvuje. Prejdeme na druhý riadok, ten má medzery v treťom a štvrtom stĺpci. Do nich sa zmestí slučka S24. Napíšeme túto kombináciu na spodok tabuľky a prehľadávame ďalej.

2	1	4	3	6	5	S1,	S24,	S28
2	1	4	3	6	5	S24,	S28,	S1

Zase začneme na vrchole tabuľky a hľadáme riadok, ktorý by zapadol do voľných stĺpcov, ktoré zostali pri dvojiciach slučiek. Tak nájdeme trojice navzájom sa nedotýkajúcich slučiek. Pokračujeme so štvoricami atď.

1	3	5	6	D11		
	2	5	6	D5		
	2	3	5	D3		
	2	3	4	D1		
	2	3	4	5	D2	
	2	3	5	6	4	D4
	2	5	6	4	D6	
	2	5	3	4	**	
	3	4	6	D9		
	3	5	2	6	D7	
	3	5	2	6	4	D8
	3	4	5	6	D10	
	3	4	5	2	**	
	3	5	6	4	D12	
	3	5	2	**		

2	5	4	3	6	D5, S24
---	---	---	---	---	---------

Podobným spôsobom môžeme hľadať cesty v grafe zo vstupného do výstupného uzla. Vyšetříme všetky cesty z uzla 1 do uzla 6. 1 napíšeme p vľavo od tabuľky, cesta pokračuje do uzlov 2 a 3. Napíšeme ich do druhého stĺpca. Z 2 pokračuje do 3 a 5. 1 sme vyľúčili, lebo jedným uzlom prechádza cesta iba raz. Napíšeme 5 a 3 do druhého stĺpca. Z 3 pokračuje cesta do 5 a 4. 2 už v riadku máme. Napíšeme do tretieho stĺpca 5 a 4. Zo 4 pokračujeme do 6 – to je prvá cesta z 1 do 6; označíme ju vpravo od tabuľky. Posledný nespracovaný riadok (piaty) má vo štvrtom stĺpci 5. Z tohto uzla vedie druhá cesta do 6. Pokračujeme...

Teraz zoberieme jednotlivé slučky, ich dvojice, trojice atď. a hľadáme tie, ktoré sa nedotýkajú niektorej prenosovej cesty. Hľadáme zase taký riadok pre slučky, ktorý zapadne bez prekryvania stĺpcov do riadku pre cesty a nebudú mať rovnaké číslo v riadku.

Uvedený postup hľadania slučiek a ciest nie je jediný možný. Je však dostatočne názorný a pochopiteľný a pri troche pozornosti spoľahlivý.

6 STABILITA ELEKTRONICKÝCH SÚSTAV

Prenosová funkcia obvodu opisuje jeho odozvu na jednotkový impulz. V stabilnom obvode bude táto odozva postupne zanikať. V nestabilnom obvode odozva nevymizne, ale obvod sa dostane do nového stavu, v ktorom bude na výstupe udržiavať periodicky sa meniace napätie.

Prenosovú funkciu môžeme napísať v rôznych tvaroch, napr.:

$$K(\mathbf{p}) = \frac{N(\mathbf{p})}{M(\mathbf{p})} = \frac{b_0 \mathbf{p}^N + b_1 \mathbf{p}^{N-1} + \dots + b_N}{a_0 \mathbf{p}^M + a_1 \mathbf{p}^{M-1} + \dots + a_N} = \frac{A_1}{\mathbf{p} - \mathbf{p}_1} + \frac{A_2}{\mathbf{p} - \mathbf{p}_2} + \dots + \frac{A_M}{\mathbf{p} - \mathbf{p}_M} = F(\mathbf{p}).$$

Z poslednej rovnosti spätnou Laplaceovou transformáciou dostaneme pre časový priebeh odozvy (originál, príklad 3) vzťah:

$$f(t) = A_1 e^{\mathbf{p}_1 t} + A_2 e^{\mathbf{p}_2 t} + \dots + A_M e^{\mathbf{p}_M t},$$

kde \mathbf{p}_1 až \mathbf{p}_M sú korene charakteristického polynómu $M(\mathbf{p})$.

V stabilnej sústave odozva postupne zaniká, preto musia byť reálne časti koreňov charakteristického polynómu záporné, $[\operatorname{Re}\{\mathbf{p}_k\} < 0; k = 1 \dots M]$. Imaginárne časti koreňov $[\operatorname{Im}\{\mathbf{p}_k\}]$ opisujú periodicky sa meniacu zložku odozvy. Hovoríme tiež, že podmienkou stability sústavy je, aby póly prenosovej funkcie ležali v ľavej polrovine Gaussovej roviny.

Pokúsime sa nájsť všeobecné pravidlá na určenie stability sústavy priamo z koeficientov a_k charakteristického polynómu prenosovej funkcie. Koeficienty a_k sú reálne čísla.

1. $M(\mathbf{p}) = a_0 \mathbf{p} + a_1$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a_k > 0$. Ak by predsa len bolo a_0 záporné, tak celú prenosovú funkciu rozšírime výrazom $(-1)/(-1)$. Koreňom $M(\mathbf{p})$ je $\mathbf{p}_1 = -a_1/a_0$, teda \mathbf{p}_1 bude záporné, ak $a_1 > 0$. Systém prvého rádu je stabilný, ak oba koeficienty charakteristického polynómu sú kladné.

2. $M(\mathbf{p}) = a_0 \mathbf{p}^2 + a_1 \mathbf{p} + a_2$

Opäť predpokladajme, že $a_0 > 0$. Korene $M(\mathbf{p})$ sú:

$$\mathbf{p}_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

a) Ak bude $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$, tak reálne časti koreňov budú záporné pre $a_1 > 0$. Aby mohol byť diskriminant záporný, musí byť $a_2 > 0$. Systém je stabilný, ak sú všetky koeficienty charakteristického polynómu kladné.

b) Ak je $a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0$, tak musí byť $a_1 > 0$, lebo inak by jeden z koreňov bol kladný. Ale aj keď je $a_1 > 0$, môže byť jeden z koreňov kladný, preto musí byť $a_2 > 0$, aby platila nerovnosť $a_1^2 > a_1^2 - 4a_0 a_2$. Teda systém druhého rádu je stabilný, ak sú všetky koeficienty charakteristického polynómu kladné.

Poznámka: Z algebry je známy dôsledok Sturmovej vety, podľa ktorého nutnou podmienkou, aby korene polynómu s reálnymi koeficientmi mali záporné reálne časti je, aby všetky koeficienty polynómu boli kladné. To bude ľahko pochopiteľné, ak si zápis polynómu v tvare súčinov koreňových súčiniteľov po roznásobení upravíme.

3. $M(\mathbf{p}) = a_0 \mathbf{p}^3 + a_1 \mathbf{p}^2 + a_2 \mathbf{p} + a_3$

Nutnou podmienkou stability je, aby všetky koeficienty boli kladné. Polynóm má buď tri reálne, alebo jeden reálny a dva komplexne združené korene. Hranicu stability udáva napr. podmienka, aby

reálne časti komplexne združených koreňov boli nulové. Vtedy je $j\omega$ koreňom polynómu, a teda platí rovnosť $a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega) + a_3 = 0$. Upravíme ju na tvar:

$$a_3 - a_1\omega^2 = 0; \quad \omega(a_2 - a_0\omega^2) = 0.$$

Obe rovnice budú splnené, ak

$$\omega^2 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{a_3}{a_1}, \quad \text{alebo tiež} \quad a_1a_2 - a_0a_3 = 0,$$

čo je podmienka pre hranicu stability sústavy 3. rádu.

a) Vyšetříme sústavu pre $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$.

Začneme plynule meniť a_0 k nule tak, aby podmienka $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ zostávala zachovaná. Pri takejto zmene zostávajú reálne časti všetkých koreňov stále rovnakého znamienka, teda korene zostávajú stále v tej istej polrovine Gaussovej roviny ($\text{Re}\{ \} > 0$ alebo $\text{Re}\{ \} < 0$). Aby prešiel niektorý koreň do druhej polroviny, v okamihu prechodu by musela platiť rovnosť $a_1a_2 = a_0a_3$, čo je spor s našim predpokladom pri zmene a_0 .

Pre $a_0 = 0$ budú korene v polohe danej rovnicou $a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$. Pretože sú všetky koeficienty kladné, budú oba korene ležať v zápornej polrovine. Z vlastností koreňov vyplýva, že $p_1p_2p_3 = a_2 > 0$, tak v zápornej polrovine ležia všetky tri korene, teda sústava je stabilná.

b) Podmienku $a_1a_2 - a_0a_3 < 0$ môžeme bez porušenia dodržať ak a_1 aj $a_2 \rightarrow 0$. Korene síce menia polohu, ale neopustia „svoju“ polrovinu. Ich konečná poloha je určená rovnicou $a_0p^3 + a_3 = 0$, ktorá má riešenia:

$$p_1 = -\sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}; \quad p_2 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}e^{j\pi/2}; \quad p_3 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}e^{-j\pi/2}.$$

Reálne časti koreňov p_2 a p_3 sú kladné, takže dva korene polynómu $M(p)$ ležia v kladnej polrovine, teda sústava je nestabilná.

6.1 Hurwitzovo-Routhovo kritérium stability

Podmienku, aby pre stabilnú sústavu tretieho rádu bol súčin stredných koeficientov polynómu väčší ako súčin krajných koeficientov, našli nezávisle od seba I. A. Vyšnegradskij a K. Maxwell. S Vyšnegradského prácami sa zaoberal slovenský matematik A. Stodola, ktorý počas svojho pobytu vo Švajčiarsku predložil problém stability lineárnych sústav švajčiarovi A. Hurwitzovi. Podobne formuloval úlohu v jednej svojej práci K. Maxwell a nezávisle od Hurwitza ju vyriešil J. Routh.

Hurwitzovo-Routhovo kritérium stability vo forme predloženej Hurwitzom vyzerá takto:

Zostavíme maticu

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Nutnou a postačujúcou podmienkou aby sústava bola stabilná je, aby determinanty

$$|a_1|; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}; \quad \dots$$

boli kladné.

Determinanty tvoríme z ľavého horného rohu matice postupným zvyšovaním počtu riadkov a stĺpcov o jeden, až kým sa prvýkrát nevyskytne najvyšší koeficient polynómu. Napr. pre polynóm 6. stupňa skončíme 4 – riadkovým (stĺpcovým) determinantom, v ktorom je $a_7 = 0$. Pridaním ďalšieho riadku, v ktorom by boli $a_9, a_8, a_7 = 0$, by sme nezískali žiadnu novú informáciu. Pridanie ďalšieho (šiesteho) riadku vedie už na determinant rovný nule.

Príklad 47. Skontrolujme podmienky stability pre sústavu 1., 2. a 3. rádu.

Vychádzame z predpokladu $a_0 > 0$.

1. $|a_1| = a_1 > 0$. Sústava 1. rádu je stabilná, ak je $a_1 > 0, a_0 > 0$.

2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$ Pretože je podľa výsledku a 1. $a_1 > 0$, bude aj $a_2 > 0$. Sústava 2. rádu je stabilná, ak sú všetky jej koeficienty a_0, a_1, a_2 kladné.

3. $\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ Zopakujeme postup z 2. časti príkladu. Sústava 3. rádu je stabilná ak $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

6.1.1 Schurov algoritmus

Výpočet determinantov síce nie je komplikovaný, ale pre vyššie rády polynómov bude predsa len výhodnejšie Hurwitz-Routhovo kritérium nejako algoritmizovať. Vhodný je (aj pre počítače) Schurov algoritmus, čo je vlastne úprava determinantu na trojuholníkový tvar.

1. Napíšeme koeficienty charakteristického polynómu do riadku podľa rastúceho alebo klesajúceho stupňa premennej p

$$a_M \quad a_{M-1} \quad a_{M-2} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0$$

2. Určíme pomocný súčiniteľ tak, že prvé číslo riadku (a_M) vydělíme druhým číslom (a_{M-1}) v riadku

$$a_M \quad a_{M-1} \quad a_{M-2} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0 \left\| \begin{array}{l} a_M \\ a_{M-1} \end{array} \right.$$

3. Každý párny člen v riadku vynásobíme pomocným súčiniteľom a súčin odrátame od najbližšieho nižšieho (nepárneho) člena.

$$\begin{array}{cccccc} a_M & a_{M-1} & a_{M-2} & \dots & a_1 & a_0 \left\| \begin{array}{l} a_M \\ a_{M-1} \end{array} \right. \\ -\frac{a_M}{a_{M-1}} a_{M-1} & -\frac{a_M}{a_{M-1}} a_{M-2} & \dots & -\frac{a_M}{a_{M-1}} a_{M-1} & & \\ \hline & a_{M-1} & a'_{M-2} & \dots & a'_1 & a_0 \end{array}$$

Nulu na prvom mieste nemusíme písať.

4. Ak sú všetky rozdiely kladné, zopakujeme postup podľa bodov 2. a 3. Postup opakujeme tak dlho, kým sa nevyskytne prvý záporný výsledok alebo kým zostanú v riadku iba tri čísla.

5. Keď je niektorý z priebežných rozdielov záporný, sústava je nestabilná, výpočty skončíme. V prípade, že je niektorý iný rozdiel, ako prvý zľava nulový, znamená to dvojicu imaginárnych koreňov, teda sústava je na hranici stability.

Príklad 48. Charakteristický polynóm je $M(p) = p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 16p + 5$. Je sústava stabilná?

Napíšeme maticu:

$$\begin{pmatrix} 16 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 16 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 16 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 16 & 5 \end{pmatrix}$$

Štvrtý riadok a posledné dva stĺpce matice sme nemuseli písať. Na prvý pohľad je zrejmé, že nám už žiadnu novú informáciu o stabilite sústavy nedajú.

Vypočítame postupne determinanty

$$|16| = 16 > 0; \quad \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 80 - 20 = 60 > 0; \quad \begin{vmatrix} 16 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0.$$

Tretí determinant je záporný, teda sústava je nestabilná.

Zopakujeme riešenie pomocou Schurovho algoritmu

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 5 & 16 & 5 & \left\| \frac{1}{4} \right. \\ -\frac{1}{4} \cdot 4 & & & & & \\ \hline & 4 & 1 & 16 & 5 & \left\| \frac{4}{1} \right. \\ -4 \cdot 1 & & & & & \\ \hline & & 1 & -4 & 5 & \end{array}$$

postupujeme podľa bodov 1., 2., 3.

Všetky čísla sú kladné, opakujeme postup podľa bodov 2. a 3.

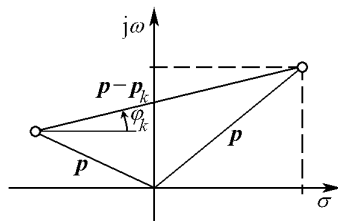
Jeden z rozdielov je záporný, to znamená že sústava je nestabilná.

6.2 Michajlovovo-Leonhardovo kritérium stability

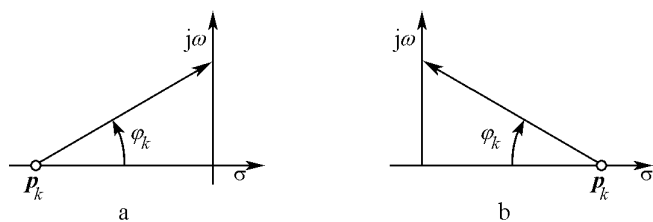
Michajlov v roku 1938 zverejnil kritérium stability, ktoré v r. 1944 zdokonalil Leonhard. Vyjdeme z charakteristického polynómu prenosovej funkcie $M(p) = a_0 p^M + a_1 p^{M-1} + \dots + a_M$, ktorý napíšeme pomocou koreňových súčiniteľov $M(p) = a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_M)$. Každý z nich môžeme vyjadriť v polárnom tvare $p - p_k = r_k e^{j\varphi_k}$, takže môžeme aj polynóm napísať v tomto tvare:

$$M(p) = a_0 r_1 r_2 \dots r_m e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_M)}.$$

Vyšetříme φ_k . Zakreslíme koreňový súčiniteľ v rovine p (obr. 112). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme sústavy vyšetřovať harmonickým signálom, takže prejdeme od p k $j\omega$ ($p \rightarrow j\omega$).



Obr. 112



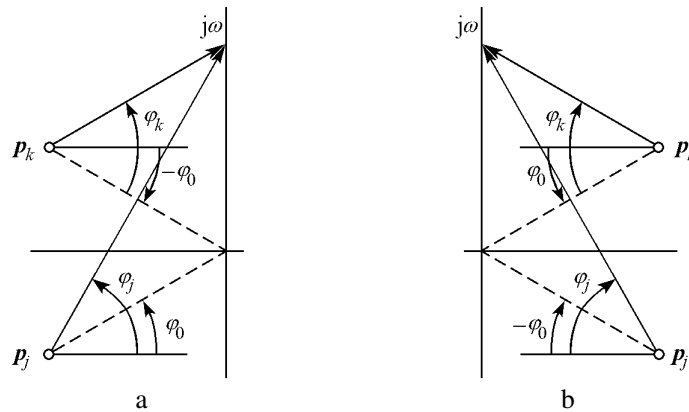
Obr. 113

1. Ak je p_k reálny záporný koreň, jeho poloha v Gaussovej rovine je na obr. 113a. Pri zmene kmitočtu od $\omega = 0$ po $\omega \rightarrow \infty$ sa r_k otáča až po $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_k = \pi/2$.

2. Ak je p_k reálny kladný koreň, tak pri zmene kmitočtu od $\omega = 0$ po $\omega \rightarrow \infty$ sa bude r_k otáčať až $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_k = -\pi/2$ (obr. 113b).

3. Keď je p_k komplexný koreň so zápornou reálnou časťou, tak koreňom polynómu $M(p)$ je aj komplexne združené číslo s p_k . Poloha oboch koreňov v Gaussovej rovine je na obr. 114a. Pri zmene ω od 0 po ∞ sa r_k a r_j otáčajú až po

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_k = \pi/2 + \varphi_0; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_j = \pi/2 - \varphi_0.$$



Obr. 114

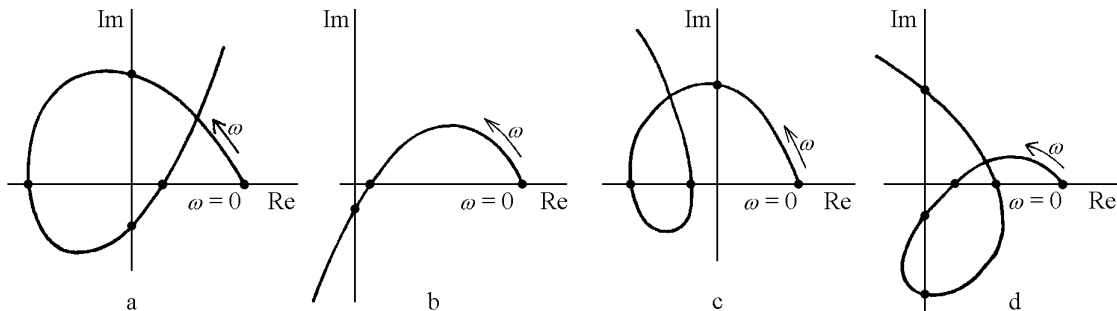
4. Keď je p_k komplexný koreň s kladnou reálnou časťou, tak podobne ako v bode 3., je poloha koreňov na obr. 114b. a limitný stav je

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_k = -(\pi/2 + \varphi_0); \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_j = -(\pi/2 - \varphi_0).$$

Argument polynómu $M(p)$ je rovný súčtu argumentov jednotlivých koreňov. Ak je sústava M -tého rádu stabilná, tak reálne časti všetkých koreňov sú záporné. Podľa vlastností argumentov a podľa bodov 1., 2. a 3. je $\varphi = M\pi/2$. V nestabilnej sústave má niektorý z koreňov kladnú reálnu časť, a preto podľa vlastnosti z bodu 4. je $\varphi > M\pi/2$.

Podľa Michajlovovho – Leonhardovho kritéria je sústava s charakteristickým polynómom $M(p)$ rádu M stabilná, ak argument tohoto polynómu je pre $p = j\omega$ a $\omega \rightarrow \infty$ rovný $M\pi/2$.

Hľadanie koreňov charakteristických polynómov stupňa vyššieho ako 2. nie je ani jednoduché, ani rýchle. Preto je výhodné vyšetrovať hodografy polynómu (graf $M(j\omega)$ v Gaussovej rovine), obr. 115.

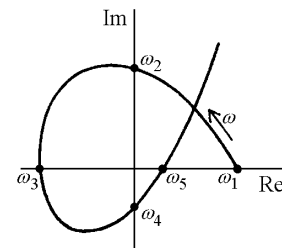


Obr. 115

Na hodografe sledujeme o aký uhol sa otočí „sprievodič“ ($lM(j\omega)$) okolo začiatku pri zmene ω od 0 po ∞ . Ak je celkový uhol rovný $M\pi/2$, kde M je rád polynómu a súčasne počet priesečníkov hodografu so súradnými osami, je sústava stabilná. Na obr. 115 je a) stabilná sústava 5. rádu, ostatné sú nestabilné sústavy b) 3. rádu; c) 4. rádu; d) 6. rádu.

Označme si postupne (obr. 116) kmitočty, pri ktorých hodograf pretína reálnu a imaginárnu os ako $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots$ atď. Pre kmitočty s nepárnym indexom pretína hodograf stabilnej sústavy reálnu os, pre párne indexy imaginárnu os. Sústava je teda stabilná, ak každý ďalší priesečník je oproti predošlému otočený o $\pi/2$, a teda ak je

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots \text{ atď.}$$



Obr. 116

Pre nestabilnú sústavu môžu byť niektoré ω aj imaginárne alebo komplexné čísla, ktorých poloha v rovine M sa nedá zakresliť.

Príklad 49. Vyšetrite stabilitu sústavy s charakteristickým polynómom

$$M(p) = p^5 + p^4 + 20p^3 + 10p^2 + 64p + 9$$

Nahradíme $p \rightarrow j\omega$ a upravíme $M(p)$ na tvar:

$$M(j\omega) = j\omega(\omega^4 - 20\omega^2 + 64) + (\omega^4 - 10\omega^2 + 9)$$

Hodograf prechádza cez reálnu os pre kmitočty určené rovnicou $[\text{Im}\{M(j\omega)\} = 0]$ $\omega(\omega^4 - 20\omega^2 + 64) = 0$, ktorej korene sú $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = \pm 2$, $\omega_5 = \pm 4$. Z riešení vyhovujú iba nezáporné korene (ω je kmitočet, teda $\omega > 0$). Imaginárnu os pretína hodograf pre kmitočty určené rovnicou $\omega^4 - 10\omega^2 + 9 = 0$, ktorej korene sú $\omega_2 = \pm 1$, $\omega_4 = \pm 3$. Zase vyhovujú iba nezáporné korene. Pretože platí $1 > 2 > 3 > 4$, je splnená podmienka $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5$, teda sústava je stabilná.

Skontrolujeme výsledok pomocou Schurovho algoritmu:

1	1	20	10	64	9	1 = 1/1
-1 · 11		-1 · 10		-1 · 9	9	
	1	10	10	55	9	0,1 = 1/10
	-0,1 · 10		-0,1 · 55		9	
		10	4,5	55	9	10/4,5 = 0,222 22
		$-\frac{100}{45} \cdot 4,5$		$-\frac{100}{45} \cdot 9$	9	
			4,5	35	9	

Všetky čísla sú kladné, preto podľa Hurwitzovho-Routhovho kritéria je sústava stabilná.

Príklad 50. Riešte príklad 48 pomocou Michajlovovho-Leonhardovho kritéria stability.

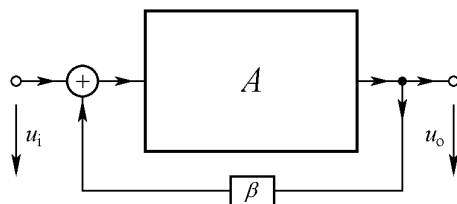
$M(p) = p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 16p + 5$ upravíme ($p \rightarrow j\omega$) na tvar $(\omega^4 - 5\omega^2 + 5) + j\omega(16 - 4\omega^2) = M(p)$. Reálnu os pretína hodograf pre $\omega_1 = 0$ a $\omega_3 = \pm 2$, imaginárnu os pre $\omega_2 = \pm 1,1756$ a $\omega_4 = \pm 1,902$.

Podmienka $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$ nie je splnená, lebo $0 < 1,1756 < 2 > 1,902$, teda sústava je nestabilná.

6.3 Nyquistovo kritérium stability

So stabilitou statických systémov so spätnou väzbou sa zaoberal američan H. Nyquist a v roku 1932 publikoval kritérium stability, ktoré umožňuje posudzovať stabilitu sústavy so spätnou väzbou analyzovaním alebo meraním prenosu tejto sústavy pri rozpojení spätnej väzby.

Obvod so spätnou väzbou je na obr. 117. Časť výstupného napätia βu_o sa pričíta k vstupnému napätiu u_i , takže do časti obvodu s prenosom A vstupuje napätie $u_i + \beta u_o$. Výstupné napätie je $u_o = A(u_i + \beta u_o)$. Po úprave dostaneme pre prenos obvodu so spätnou väzbou vzťah $K_u = \frac{u_o}{u_i} = \frac{A}{1 - \beta A}$, ktorý sa nazýva *Blackov vzťah*.



Obr. 117

Podľa toho, či je $\beta > 0$ alebo $\beta < 0$, hovoríme o kladnej alebo zápornej spätnej väzbe. Pri kladnej spätnej väzbe je $K_u > A$, a ak je $\beta A = 1$, $K_u \rightarrow \infty$, teda sústava môže mať nenulové výstupné napätie, hoci na vstup žiadne napätie neprivádzame. Sústava je nestabilná.

Vo všeobecnosti A aj β závisia od kmitočtu, takže Blackov vzťah v Laplaceovej transformácii má tvar

$$K_u(\mathbf{p}) = \frac{A(\mathbf{p})}{1 - \beta(\mathbf{p})A(\mathbf{p})}$$

Aby bola sústava nestabilná, musí existovať také \mathbf{p}_0 , pri ktorom je

$$|\beta(\mathbf{p}_0)A(\mathbf{p}_0)| = 1 \quad \text{a} \quad \arg[\beta(\mathbf{p}_0)A(\mathbf{p}_0)] = 0 \pm 2k\pi, \quad \text{kde } k = 0, 1, 2, \dots$$

Vhodnou voľbou $\beta(\mathbf{p})A(\mathbf{p})$ môžeme teda dosiahnuť, aby sústava bola stabilná alebo naopak, pri stavbe generátorov získať obvod, ktorý spoľahlivo kmitá na požadovaných kmitočtoch. Stabilitu sústavy môžeme preto vyšetriť analyzovaním výrazu $\beta(\mathbf{p})A(\mathbf{p})$, čo je vlastne prenos sústavy na výstupe spätňoväzbovej vetvy pri rozopnutej spätnej väzbe. V praxi dokonca môžeme tento prenos priamo zmerať, a tým sa vyhnúť komplikovaným a zdĺhavým rozborom.

Prenos obvodu bez spätnej väzby je $A(\mathbf{p}) = N(\mathbf{p})/M(\mathbf{p})$. Podobne vetva spätnej väzby má prenos $\beta(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p})/m(\mathbf{p})$. Prenos sústavy so spätnou väzbou je

$$K_u(\mathbf{p}) = \frac{\frac{M(\mathbf{p})}{N(\mathbf{p})}}{1 - \frac{n(\mathbf{p})}{m(\mathbf{p})} \frac{N(\mathbf{p})}{M(\mathbf{p})}} = \frac{P^{(N+m)}(\mathbf{p})}{Q^{(M+m)}(\mathbf{p})}$$

kde $(N + m)$ a $(M + m)$ označujú stupeň polynómov. Sústava so spätnou väzbou bude stabilná, ak (podľa Michajlova a Leonharda) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg[Q^{(M+m)}(j\omega)] = (M + m)\pi/2$.

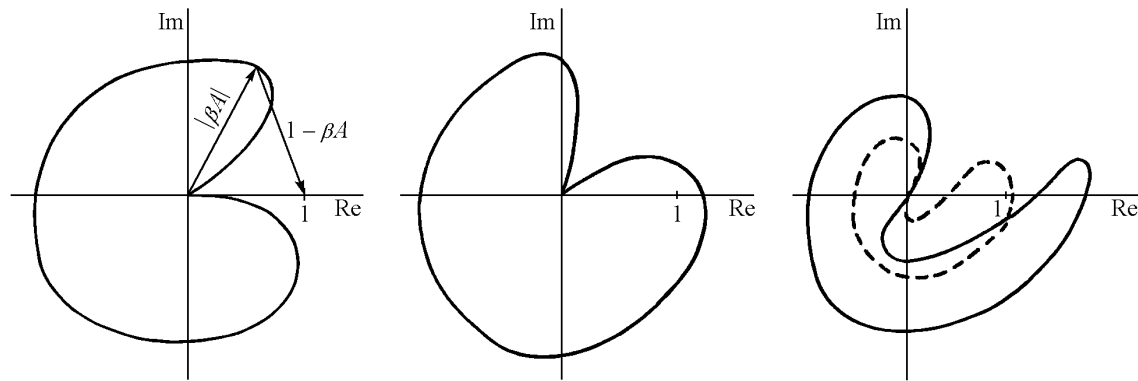
$$\text{Vratný rozdiel je } 1 - \beta(\mathbf{p})A(\mathbf{p}) = 1 - 1 - \frac{n(\mathbf{p})}{m(\mathbf{p})} \frac{N(\mathbf{p})}{M(\mathbf{p})} = \frac{m(\mathbf{p})M(\mathbf{p}) - n(\mathbf{p})N(\mathbf{p})}{m(\mathbf{p})M(\mathbf{p})} = \frac{Q^{(N+m)}(\mathbf{p})}{R^{(M+m)}(\mathbf{p})}$$

To je racionálna lomená funkcia, v ktorej stupeň čitateľa je rovný stupňu menovateľa. Ak je sústava s rozpojenou spätnou väzbou stabilná, tak najväčšia zmena argumentu charakteristického polynómu je $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg[R^{(M+m)}(j\omega)] = (M + m)\pi/2$, a teda zmena argumentu vratného rozdielu pri zmene ω od 0 po ∞ je rovná nule.

Z obr. 118a vidno, že bod $[1, j0]$ musí ležať mimo plochu, ktorú hodograf funkcie $\beta(j\omega)A(j\omega)$ obopína, ba aj mimo krivku samotnú. V opačnom prípade bude (obr. 118b) zmena argumentu $\beta(j\omega)A(j\omega)$ rovná 2π , teda sústava bude nestabilná.

Sústava, ktorej Nyquistov hodograf je na obr. 118c, je stabilná za istých podmienok. Po pripojení napájacích a pracovných napätí vplyvom prechodových javov a tepelnej nerovnováhy sa diagram mení. V počiatku súradnej sústavy „narastá“ z nuly až do konečnej podoby. Keď má tvar naznačený prerušovanou čiarou, je sústava nestabilná. Rozkmitá sa, a vôbec sa nemusí dostať do režimu popísaného na obrázku plnou čiarou. Pritom je vysoko pravdepodobná situácia, že obvod pripojený na pracovné napätia pri rozpojenej spätnej väzbe, sa po jej zopnutí správa ako stabilný obvod. Hovoríme v takom prípade o **podmienečnej stabilite**.

Zjednodušene sa dá Nyquistovo kritérium stability formulovať takto: Sústava so spätnou väzbou je stabilná, ak bod $[1, j0]$ pre všetky $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ leží mimo plochu ktorú obopína krivka $\beta(j\omega)A(j\omega)$.



Obr. 118

6.4 Bodeho logaritmicko-kmitočtové kritérium stability

6.4.1 Logaritmické kmitočtové charakteristiky

Preskúmame obvod, ktorého prenosová funkcia je $K(p) = \frac{A}{p+a}$. Závislosť fázy a amplitúdy od kmitočtu určíme, keď prejdeme od p k ω ($p \rightarrow j\omega$): $K(j\omega) = \frac{A}{j\omega+a}$. Amplitúdová charakteristika je

opísaná vzťahom $K(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$; fázová $\varphi(\omega) = \arg[K(j\omega)] = \text{arctg}(-\omega/a)$. Grafy oboch

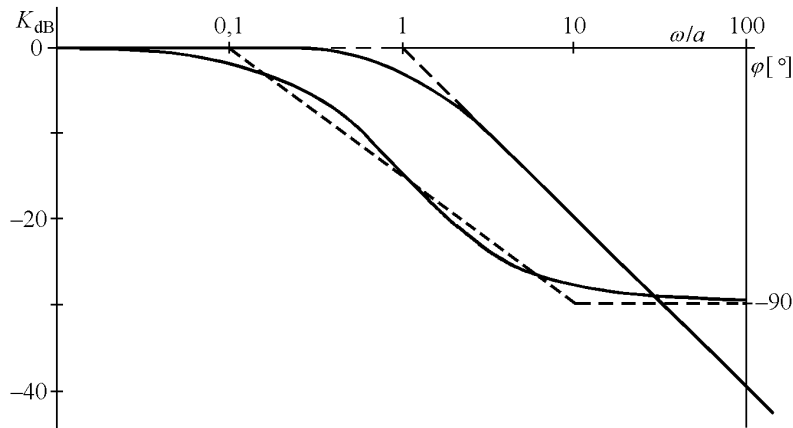
funkcií sú na obr. 119.

Elektronické obvody bežne pracujú vo veľmi širokom kmitočtovom rozsahu: $\omega/a = 10^4 - 10^9$. Je užitočné používať logaritmickú mierku pre kmitočet. Ak takúto mierku použijeme aj na činiteľa prenosu, tak charakteristiky pre zložité systémy môžeme dostať prostým sčítaním logaritmických charakteristík jednoduchých obvodov.

Zavedieme si novú veličinu: $K_{\text{dB}} = 20 \log|K(\omega)|$, ktorej jednotkou je 1 dB (decibel). Pre zmenu kmitočtu v logaritmickej mierke zavedieme *dekádu*. Je to interval, v ktorom sa kmitočet mení 1 : 10 (niekedy sa používa *oktáva*, čo je interval pre zmenu kmitočtu v pomere 1 : 2. Názov oktáva je prevzatý z hudobníckej terminológie).

Vrátíme sa k vyšetrovanému obvodu. Pre $\omega \rightarrow 0$ je amplitúdová charakteristika určená vzťahom $K(\omega) = A/a$. Vtedy $K_{\text{dB}} = 20 \log(A/a)$, čo je konštanta. Pre $\omega \rightarrow \infty$ je $K(\omega) \approx A/\omega$. $K_{\text{dB}} = 20 \log A -$

– $20 \log |\omega|$, čo je priamka so sklonom -20dB/dekádu , ktorá pretína priamku $K(\omega) = A/a$ pre kmitočet $\omega = a$.



Obr. 119

Vypočítame hodnoty $K(\omega)$, K_{dB} , $\varphi(\omega)$ pre niektoré kmitočty a zostavíme tabuľku:

	$0,01a$	$0,1a$	$1a$	$10a$	$100a$
$K(\omega)/(A/\omega)$	0,99995	0,995	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{101}$	$1/\sqrt{10001}$
$20 \log A - K_{\text{dB}}$ [dB]	$-4,3 \cdot 10^{-3}$	-0,044	-3,01	-20,04	-40
$\varphi(\omega)$ [°]	-0,57	-5,7	-45	-84,3	-89,4

Ak aproximujeme charakteristiky prerušovanými čiarami z obr. 119, tak amplitúdová charakteristika sa od aproximovanej líši najviac pre $\omega = a$, a to o -3 dB; fázová pre $\omega_d = 0,1a$ a $\omega_h = 10a$, a to o $\pm 5,7^\circ$.

Prenosová funkcia obvodu zloženého z jednoduchých obvodov s prenosmi $K_1(p)$, $K_2(p)$, ..., $K_n(p)$ sa obvykle dá napísať $K(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot \dots \cdot K_n(p)$. Potom logaritmická amplitúdová charakteristika je $K_{\text{dB}} = K_{\text{dB}1} + K_{\text{dB}2} + \dots + K_{\text{dB}n}$ a fázová $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$. Grafy charakteristík zložených obvodov dostaneme prostým grafickým sčítaním grafov jednoduchých obvodov.

Podobne môžeme aproximovať charakteristiky pre integrátor ($1/p$), derivátor (p) a rezonančný obvod [$1/(p - p_1)(p - p_1^*)$].

Príklad 51. Nakreslite aproximovanú amplitúdovú a fázovú logaritmickú kmitočtovú charakteristiku obvodu, ktorého prenosová charakteristika je:

$$K(p) = \frac{100}{(1 + 2 \cdot 10^{-5} p)(1 + 1 \cdot 10^{-6} p)} = \frac{10}{1 + 2 \cdot 10^{-5} p} \cdot \frac{10}{1 + 1 \cdot 10^{-6} p}.$$

Útlmovú logaritmickú charakteristiku dostaneme logaritmovaním $K(\omega)$:

$$K(\omega) = 20 \cdot (1 - \log |1 + 2 \cdot 10^{-5} j\omega|) + 20 \cdot (1 - \log |1 + 10^{-6} j\omega|).$$

Fázová charakteristika je $\varphi(\omega) = \arctg(-2 \cdot 10^{-5} \omega) + \arctg(-1 \cdot 10^{-6} \omega)$. Jednotlivé priebehy sú zakreslené do obr. 120 slabou čiarou, ich súčty tučnou čiarou.

6.4.2 Bodeho kritérium stability

Toto kritérium vychádza z Nyquistovho a vyšetruje $K = 20 \log |\beta(j\omega)A(j\omega)|$. Podmienkou stability je, aby pre kmitočety ω_0 , v ktorom je $|\beta(j\omega_0)A(j\omega_0)| = 1$, bol $\text{arg} [\beta(j\omega_0)A(j\omega_0)] < 180^\circ$ pre zápornú spätnú väzbu, a $\text{arg} [\beta(j\omega_0)A(j\omega_0)] > 0$ pre kladnú spätnú väzbu.

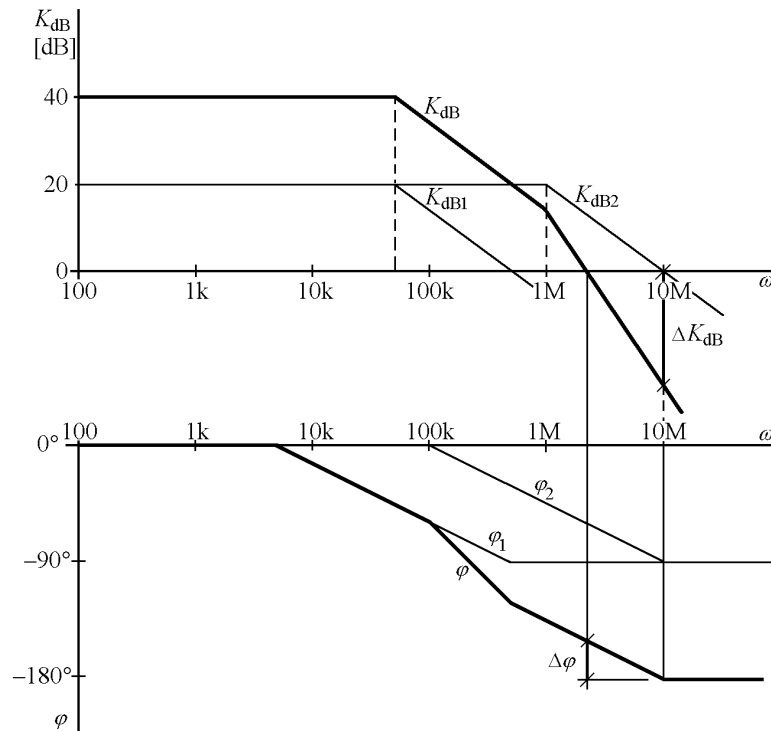
Z predošlej kapitoly a obr. 120 vyplýva, že pre kmitočty v pásme, kde má amplitúdová charakteristika sklon -40dB/dekádu , je fázový uhol prenosovej funkcie rovný -180° . Pre stabilitu je však rozhodujúci fázový uhol pre kmitočety ω_0 , v ktorom je $K_{\text{dB}} = 0\text{ dB}$. Rozdiel $\Delta\varphi = 180^\circ - \varphi(\omega_0)$ (obr. 120) sa nazýva fázová rezerva a je to zmena fázy, ktorú treba (úmyselnými alebo nechcenými) úpravami obvodu vyvolať, aby sa dostal na hranicu stability.

Podobne sa pri $\varphi = -180^\circ$ zavádza amplitúdová rezerva (na obr. 120 ΔK) ako zosilnenie, o ktoré treba činiteľa prenosu obvodu zvýšiť, aby sa dostal na hranicu stability. Ak je amplitúdová rezerva číslo záporné, obvod je nestabilný.

Pre obvody s minimálnou fázou (pozri str. 99) sa fáza pri zmene strmosti o $\pm 20\text{ dB/dekádu}$ mení o $\pm 90^\circ$. Teda na dosiahnutie fázy 180° musí mať amplitúdová charakteristika sklon 40 dB/dekádu . Ak amplitúdová charakteristika tento sklon nepresiahne, tak obvody s minimálnou fázou sa dostanú najviac len na hranicu stability.

Obvody s neminimálnou fázou môžu dosiahnuť fázový uhol 180° už pri menšom sklone amplitúdovej charakteristiky. O tom, či ide o obvod s minimálnou alebo neminimálnou fázou, častokrát rozhodujú rôzne parazitné väzby a parametre, ktorých veľkosti v praxi vôbec nepoznáme alebo nevieme ani zmerať.

Z Bodeho asymptotických grafov získame rýchlo prehľad o vlastnostiach sústavy a môžeme navrhnúť korekcie obvodov tak, aby sústava bola stabilná (v prípade generátorov spoľahlivo nestabilná). Všeobecná rada je: konštruovať obvody a korekcie tak, aby úroveň 0 dB pretínala tá časť amplitúdovej charakteristiky, ktorá má sklon 20 dB/dekádu . Ak to nejde, alebo to z hľadiska vlastností obvodu nie je žiaduce, tak fázová rezerva by mala byť najmenej 10° ; optimum je 30° .



Obr. 120

6.5 Poznámka k vyšetreniu stability obvodov

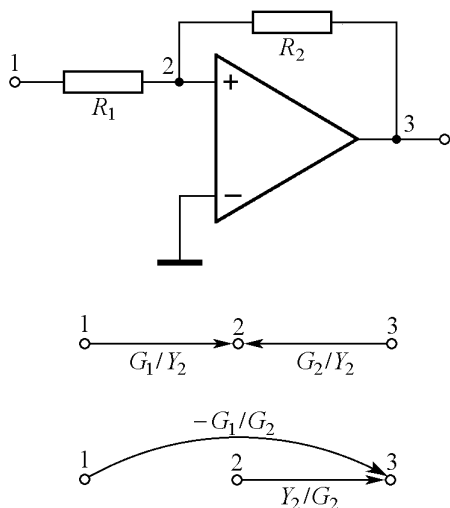
Vyšetrovanie stability sústavy nám častokrát ušetrí nemilé prekvapenie. Ak analyzujeme obvod, ktorého činnosť nám nie je jasná, tak rutinný výpočet nemusí viesť k správne výsledku. Riešime prenos obvodu z obr. 121 pre ideálny operačný zosilňovač. Invertujeme na grafe obvodu vetvu $3 \rightarrow 2$ na $2 \rightarrow 3$. Napät'ový prenos je $K_u = -R_2/R_1$, čo je výraz rovnaký ako pre invertujúci zosilňovač s ideálnym operačným zosilňovačom. Zapojenie z obr. 121 je však analógový komparátor s hysterézou, čo nie je stabilný obvod.

Vyšetríme obvod znovu, ale maticovou metódou. Admitančná matica obvodu je:

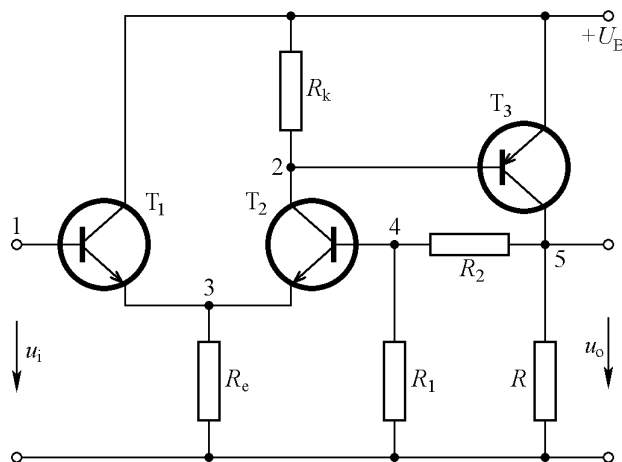
$$(Y) = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & G_1 & -G_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & G_1 + G_2 & -G_2 \\ \hline 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

a napät'ový prenos $K_u = \frac{D_{13}}{D_{11}} = \frac{G_1}{-G_2} = -\frac{R_2}{R_1}$. Je to výraz rovnaký ako pri riešení grafom, ale posledná

úprava, pri ktorej sme postupovali síce formálne správne prenesením záporného znamienka z menovateľa pred zlomok, je z fyzikálneho hľadiska neprípustná. Záporný menovateľ pre napät'ový prenos, v ktorom je stupeň p rovný nule znamená (pozri Hurwitzovo kritérium), že vyšetřovaný obvod je nestabilný, a preto vzťah pre napät'ový prenos je nesprávny. Obvod sa do lineárneho režimu, v ktorom by mal vypočítanú hodnotu prenosu, vôbec nedostane.



Obr. 121



Obr. 122

Príklad 52. Vyšetříme prenos obvodu z obr. 122
Admitančná matica obvodu je

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	G_k	$-S_2$	S_2	0
3	$-S_1$	0	$S_1 + S_2 + G_e$	$-S_2$	0
4	0	0	0	$G_1 + G_2$	$-G_2$
5	0	$-S_3$	0	$-G_2$	$G_2 + G$

Je to obvod podobný zapojeniu na obr. 109, ale odpor R_k je zapojený do kolektora druhého tranzistora, čo zmení fázu spätnej väzby do prvého tranzistora o $-\pi/2$, teda obvod z obr. 122 bude asi nestabilný. Vyšetříme napäťový prenos:

$$K_u = \frac{D_{15}}{D_{11}} = \frac{S_1 S_2 (-S_3)(G_1 + G_2)}{G_k (S_1 + S_2 + G_k)[G(G_1 + G_2)G_{12}] - S_2 (-G_2)[S_2^2 - (S_1 + S_2 + G_k)S_2]} \approx$$

$$\approx \frac{-S_1 S_2 S_3 (G_1 + G_2)}{-S_1 S_2 S_3 G_1} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

Posledný výraz je zhodný s výsledkom príkladu 45 (str. 113). Zase sme sa dopustili neprípustnej úpravy. Determinant D v menovateli prenosovej funkcie je záporný, preto je zapojenie z obr. 122, podľa Hurwitzovho kritéria nestabilné.

Skôr než ukončíte analýzu obvodu, treba vždy vyšetriť či ide o stabilnú sústavu. Ak nie, tak dosiahnuté výsledky podrobte starostlivému rozboru, aby ste získali opis skutočného, a nie nejakého fiktívneho správania sa obvodu.

Literatúra

- [1] ANGOT, A.: *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*. Praha : SNTL, 1972.
- [2] PÍRKO, Z. – VEIT, J.: *Laplaceova transformace*. Praha : SNTL; Bratislava : ALFA, 1970.
- [3] MAYER, D.: *Úvod do teorie elektrických obvodů*. Praha : SNTL; Bratislava : ALFA, 1978.
- [4] ČAJKA, J. – KVASIL, J.: *Teorie lineárních obvodů*. Praha : SNTL; Bratislava : ALFA, 1979.
- [5] SIGORSKIJ, V.P.: *Riešenie elektrónkových a tranzistorových obvodov*. Bratislava : SNTL, 1963.
- [6] SIGORSKIJ, V. P. – PETRENKO, A. I.: *Osnovy teorii elektronnych schem*. Kijev : Technika, 1967.
- [7] ABRAHAMS, J. R. – COVERLY, G. P.: *Signal Flow Analysis*. Oxford : Pergamon Press, 1965
(aj ruský preklad Moskva : Mir 1967).
- [8] MAYER, D.: *Analýza elektrických obvodů maticovým počtem*. Praha : Academia, 1966.
- [9] MENDE, U.: *Netzwerkanalyse mit Mason-Graphen*. Berlin : VEB Verlag Technik, 1987.

RNDr. Peter Kohaut, doc. RNDr. Pavel Šöra, CSc.

ELEKTRONIKA I
Analýza lineárnych elektronických obvodov

Vedúci katedry: doc. RNDr Andrej Jaroševič, CSc.
Vydala Katedra rádiofyziky FMFI Univerzity Komenského, Bratislava
Technicky redigoval a spracoval: Peter Kohaut
Korigovali autori

Rozsah 117 strán, 9,58 AH, 10 VH, upravené elektronické vydanie, fomát A/4, zadané do výroby vo februári 2003, vyšlo v apríli 2003.

ISBN 80 – 223 – 0615 – 0